BHS
II K
12

BHS II K 12

Lehrbuch

der

reinen Mathematik.

Von

J. v. R.

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: II 4
B. Nr. 12

München,
1827.

BIBLIOTHEK
DER K.B. GENERAL
BERGW. U. SALINEN
ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I. Abtheilung.

Arithmetik und Algebra.

In ihrer Wechselwirkung
und
ihren streng logischen Gesetzen.

Ciceron dit: „que rien ne sauroit être imaginé de si absurde, qui ne soit soutenu par quelque philosophe: et en général, la profondeur de l'esprit n'empeche pas de tomber dans des absurdités pour soutenir l'opinion qu'on a embrassée.“

(Lettres de M. Euler. Paris 1778. Pag. 99.)

Vorrede.

Die Würde und Gemeinnützigkeit einer Wissenschaft bestehet darin, daß sie uns über allgemein nützliche Gegenstände mit den einfachsten Mitteln unterrichtet.

Wenn also eine Wissenschaft, wie Mathematik, und für unsern Fall allgemeine Größenlehre, durch unlogische Voraussetzung vermeintlicher Gesetze, wie z. B. der Addition gleicher Zeichen, auf selbst geschaffene Schwierigkeiten und Widersprüche geführt wurde, so ist es verdienstlich, sie auf einfachere und allgemein verständlichere Grundsätze zurück zu führen,

besonders wenn unverkennbar nachgewiesen werden kann, daß dieselbe durch diese Vereinfachung an verhältnißmäßiger größerer Leistung gewonnen hat.

Im hiemit folgenden ersten Theil eines Lehrbuches der reinen Mathematik, welches Arithmetik und Algebra enthält, ist nachgewiesen, daß nach viel einfacheren logischen Gesetzen, in Beziehung des schwierigsten Theiles, worin die bestehende Theorie nur sehr Beschränktes, Unzureichendes und großen Theils auch Unrichtiges leistet, nemlich in der Auflösung der höheren Gleichungen, eine Gleichung eines jeden Grades vollständig in alle ihre Factoren aufgelöst werden kann, und dieß ist die eigentliche und höchste Aufgabe der Analys.

Der Schüler ist nicht befriedigt, wenn ihm der Lehrer auch einen noch so gelehrten und sublimen Beweis gibt, daß er diese oder jene Gleichung nicht aufzulösen vermag, er will lernen, es zu leisten. In diesem Lehrbuche werden Gleichungen vom 1. bis zum 8. Grade mit ganz einfachen und gleichförmigen

Gesetzen aufgelöset, wo nach der allgemeinen Theorie schon Unsicherheit und mystische Resultate beim 3ten Grade eintreten.

Es wird in selben bewiesen, daß jede Gleichung unter der gehörigen Beziehung betrachtet, aufgelößt werden kann, wenn sie nur isolirter arithmetischer Werthe nach, keine Unmöglichkeit bedingt, als z. B. $x^2 + 30 = 20$ u. dgl.

Der Studirende kömmt hier gar nicht in den Fall, sich in eine Controverse mit der bestehenden Theorie einlassen zu müssen, denn alle ihre Grundsätze kommen gar nicht vor, d. i. eine Addition gleicher Zeichen. Eine Multiplication $+ \times -$, $- \times -$, u. s. w. kommen gar nicht vor, d. i. sie sind nie bedingt. *)

Es kann also auch niemals eine Theorie positiver und negativer oder wohl gar imaginärer Größen gefolgert werden, mit allen den unüberwindlichen Schwierigkeiten, Paradoxen und Widersprüchen, welche sie über die ganze Analys verbreitet hat. So hat sich die Allmacht des Einfachen auch hier be-

---

*) (S. Isis 11. Heft 1825.)

wehrt, und die erste der Wissenschaften von den Schlaken der Schwäche der menschlichen Vernunft gereinigt.

In das letzte Detail der concreten Arithmetik, worüber ohnehin schon so viele brauchbare Schul- u. a. Lehrbücher bestehen, einzugehen, konnte hier nicht bedingt seyn, doch sind einige neue Ansichten entwickelt worden.

In Beziehung auf Geometrie wurde hier der gewöhnlichen Bahn mit einigen kleinen Ausnahmen, als z. B. der Theorie der Parallelen, und der Berechnung des Werthes der Kugel und ihrer Fläche, gefolgt. *)

In Hinsicht der ebenen und spherischen Trigonometrie, welche hier blos als Corollare der Geometrie behandelt werden, wurde nicht allein die Distanzen-Berechnung im Dreieck, sondern auch alles geleistet, was die Polygoneometrie leistet, ohne des-

*) Ich habe für dieselbe Anzahl von Beweisen 35 Figuren weniger als Lemoine, also eine Figur construirt, welche 35 Beweise enthält.

wegen andere, als die einfachsten Lehrsätze der Geometrie in Anwendung zu bringen.

Die Trigonometrie wurde deswegen in diesem Lehrbuche ohne die mindeste Benützung analytischer Formen behandelt, um zu beweisen, daß sie gänzlich ohne ihnen bestehen kann, und durchaus reine Geometrie seye.

In einer neuen Anflage, welche eine mehr als gewöhnliche mathematische Bildung erzwecken soll, wird nachgewiesen werden, daß mit Einschluß der Arithmetik der sinus, auch die combinirtesten trigonometrischen Formen auf die einfachsten geometrischen Gesetze begründet sind.

Die sogenannte höhere Geometrie bedingt, so wie sie hier in der dritten Abtheilung vorgetragen ist, nichts als das Gesetz der Aehnlichkeit der Dreiecke, und des Pythagorischen Lehrsatzes, im Verbande mit den einfachsten analytischen Operationen, nach den in der I. Abtheilung entwickelten Gesetzen, ganz zum Selbststudium wie die vorhergehenden Abtheilungen geeignet.

Die Differenzial- und Integralrechnung, welche ebenfalls in der III. Abtheilung vorgetragen wird,

folgt eben diesen einfachen Gesetzen, sowohl in Entwickelung ihrer Grundsätze, als ihrer Anwendung auf Geometrie.

Die Nothwendigkeit, die Leistung meiner neuen Lehre einem Lehrbuche vergleichend gegenüber zu stellen, dessen vorzüglicher Werth allgemein anerkannt ist, hat meine Wahl auf des Hr. Ed. M. J. Lemoine (d'Essoirs) Traité éleméntaire des mathématiques pures. Paris 1797, 3. edition, 8. geleitet, und ich glaube nicht, daß sie Kenner mißbilligen werden.

Der Verfasser.

Inhalt.

Pag. I. Vorrede.
» 1. Einleitung.
» 3. Arithmetische Decadik.
» 5. Rechnung mit Zahlen.
» 6. Bezeichnung der Operationen. Berichtigt und vereinfacht.
Gesetze der Addition.
» 8. » » Subtraction.
» 10. » » Multiplication.
» 14. » » Division ganzer Zahlen.
» 18. Allgemeine Gesetze der Zahlengrößen-Lehre. (Algebra).
» 20. Rechnung mit mehrtheiligen algebraischen Größen.
Gesetze der Addition.
» 21. » » Subtraction.
» 22. » » Multiplication.
» 25. » » Division.
» 27. Gebrochene Größen.

Pag. 29. Bestimmung des gemeinschaftlichen Nenners, und Rechnung mit Brüchen.
» 32. Von den Potenzen und ihren Wurzeln. Berichtigt und vereinfacht.
» 34. Ausziehung der Quadratwurzel.
» 35. Bestimmung derselben durch Annäherung, und für gebrochene Größen.
» 36. Von dem Cubus und der Ausziehung der Cubicwurzel.
» 38. Die Binomial-Formel. Combination und Permutation.
» 41. Von den Irrational-Größen.
» 42. Gesetze ihrer Addition.
» » Subtraction.
» » Multiplikation.
» » Division.
» » Potenzierung.
» » Ausziehung der Wurzeln.
» 44. Von den Verhältnissen und Progressionen.
Arithmetisches.
» 47. Geometrisches.
» 54. Von den Gleichungen vom 1ten Grade.
Mit einer unbekannten Größe.
» 59. Mit mehreren unbekannten Größen.
» 63. Gleichungen vom 2ten Grade. Berichtigt, vereinfacht und erweitert.

Pag. 68. Höhere Gleichungen vom 3ten bis 8ten Grade inclusive. Berichtigt, vereinfacht und erweitert.

» 76. Etwas von den Reihen.

» 77. Umkehrung der Reihen.

» 78. Lehre und Anwendung der Logarithmen.

» 81. Anwendung auf Zinsen-Rechnung.

» 89. Auflösung der Aufgaben dieser 1ten Abtheilung.

Einleitung.

Vorbereitende Erklärung.

1) Die Mathematik ist die Lehre der Größen, d. i. von allem, was aus Einheiten zusammengesetzet gedacht werden kann, in so ferne Vergleichung, Vermehrung und Verminderung bezweckt wird.

2) Diese Wissenschaft wird gewöhnlich in zwei Zweige abgetheilt, nemlich in die Reine und in die Angewandte.

3) Die reine Mathematik beschäftigt sich daher nur mit der Größenlehre im Allgemeinen, ohne noch besondere Eigenschaften dieser Größen zu berücksichtigen, und so zerfällt sie

1. In Arithmetik oder Zifferrechnung.
2. In Algebra oder Buchstabenrechnung, wodurch die Entwicklung allgemeiner Gesetze erzweckt wird, daher sie auch Analys heißt.
3. In Geometrie oder Berechnung und Verhältnißlehre des Raumes.

4) Die Anwendung dieser sämmtlichen Lehren auf Naturgegenstände heißt angewandte Mathematik, worunter Astronomie, Optik, Mechanik und Architectur die vorzüglichsten Zweige sind.

5) Definition postulirt eine vollständige, d. i. umfassende und klare Darstellung der Bedeutung eines Wortes, oder der Eigenschaften irgend eines Gegenstandes.

6) Axiom, ist eine so einfache Wahrheit, daß es keiner Definition bedarf.

7) Proposition ist der Antrag eines Lehrsatzes (Theorem's) oder der Aufgabe, (Problem's) aus einem erwiesenen Lehrsatze einen andern zu folgern, oder ihn für einen gegebenen Fall anzuwenden.

8) Construction ist das Anordnen der Premissen zum Beweis eines Lehrsatzes.

9) Ueberdieß giebt es noch vorbereitende, und Folge-Sätze, Erleiterungen und Bemerkungen, als Hilfsmittel den Vortrag deutlich und somit gemeinnützig zu machen, und ein Lehrbuch ist um so besser, je weniger es deren bedarf.

I. Abschnitt.

Arithmetik.

1) Die Zahlenlehre (Arithmetik) begreift die Kenntniß der Zahlen, das System, nach welchen sie geordnet werden, und die Gesetze der Berechnung durch selbe in sich.

2) Die Zahlzeichen sind neun, und werden wie folgt dargestellt:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ihre Namen sind folgende, der Ordnung nach:

Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

3) Ein zehentes Zeichen ist 0, man giebt ihm einzeln stehend keinen Werth, und nennt es darum Null (Zero).

4) Wenn man eine Zahl aus lauter Einheiten zusammen gestellt denkt, so heißt sie eine ganze Zahl.

5) Drückt die Zahl nur Theile von Einheiten aus, so heißt sie eine gebrochene Zahl.

6) Eine ganze oder gebrochene Zahl kann, in Beziehung ihrer weiteren Bedeutung, bestimmt oder unbestimmt seyn; sie ist als Zahl an sich unbestimmt, und bestimmt, wenn sie irgend ein Maas ausdrückt. Als z. B. Schuhe, Pfunde, Ellen u. dgl.

7) Da nun viele größere Zahlen bedingt werden können, als jene von neun Einheiten, so ist man überein gekommen, mittels dieser neun Zahlen, in Abtheilungen zu Zehen zu rechnen, und hiezu die Nulle (0) so zu gebrauchen, daß 10, zehen Einheiten, 20, zwanzig, 30, dreißig, 40, vierzig, 50, fünfzig, 60, sechzig, 70, siebenzig, 80, achtzig, und 90, neunzig Einheiten bezeichnen.

9) Die Zwischenzahlen findet man, indem man immer statt der, einer jeden angehängten Nulle, eine andere einfache Zahl anhängt: So schreibt man, statt einer Zahl, welche 10 und 1 zusammen ausmachen, soll 11, 10 und 2, 12 u. s. w. — Eben so würde man schreiben, statt 80 und 3, 83, statt 90 und 7, 97 u. dgl.

10) Eine Zahl über 99 würde also durch das nemliche Hilfsmittel wie 100 geschrieben werden können: d. i. das Zehenfache von Zehen oder Hundert, man kann also ebenso 200, 300, bis 900 schreiben, und eben so die Zwischenzahlen, von einem Mehrfachen der Hunderte zum anderen: als z. B. 392, 507 u. dgl. was dreihundert zwei und neunzig, und fünfhundert sieben bezeichnet, wo die Nulle anzeigt, daß keine Zehner vorhanden sind. —

11) Das Zehenfache von 100 ist also 1000, Tausend, dann folgt 10000, Zehntausend, 100000, Hunderttausend, 1000000, Zehenhunderttausend oder eine Million, u. s. w. — und eben so ihre Zwischentheile.

Man würde also achthundert sieben und dreißig Millionen, viermalhundert, drei tausend und drei und zwanzig so schreiben: 837403023, wo also die Zahlen nach ihrem zehentheiligen Gesetz geordnet sind. — u. s. w.

12) Nach diesen Gesetzen werden also die nach zehen Einheiten wachsenden Zahlen geschrieben, und es ist also leicht einzusehen, wie Zahlen geschrieben werden müssen,

welche eben so nach zehen Einheiteu abnehmen, wenn man den zehenten Theil der Einheit wie 0,1 ausdrückt, dann wird der Hunderte 0,01, und der Tausende 0,001. 0,524 würde also 524 tausend Theile der Einheit ausdrücken, und 6,726 würde sechs Einheiten, und 726 tausend Theile einer Einheit bezeichnen.

13) Die Nullen rückwärts haben also für diesen Fall keine Bedeutung, denn 0,52400 waren 52400 hundert tausend Theile der Einheit, welche 524 tausend Theile vollkommen gleich sind.

14) Im Gegensatze ist es aber gewiß, daß das Zurücksetzen des Scheidungszeichens (,) die Zahl so oft zehnmahl vergrößert, als man es um eine größere Zahl von einfachen Zahlen zurückgesetzt hat, so ist z. B. in 0,24 wenn man 02,4 schreibt, die Zahl 24 hundert Theile in zwei Ganze und vier Zehentheile verändert, also zehnmal größer geworden.

15) Unser arithmetisches Zahlen-System begründet sich also darauf, daß für die zunehmenden, wie für die abnehmenden Zahlen von der rechten zur linken, jede folgende zehnmal durch ihre Einheiten größer wird, als die vorhergehende.

Aufgabe.

1. Man soll die Zahl drei Millionen und sieben,
2. Fünf Millionen, vier und zwanzig tausend, vierhundert und dreizehn Theile schreiben?
3. Man soll die Zahl 107,90882 aussprechen?

16) Rechnung mit Zahlen.

Rechnen heißt die Kunst, Zahlen nach bestimmten Gesetzen zusammen zu setzen, und wieder zu entwickeln.

17) Zahlen können nur vermehrt, oder vermindert werden, wenn sie sich verändern sollen.

18) Der erstere Fall bedingt Zusammensetzung, der zweite Trennung; der gewöhnliche Ausdruck heißt Addition und Subtraction.

19) Die Methoden, welche diese beiden Operationen vereinfachen, heißen Multiplication und Division.

20) Es ist vor sich klar, daß man nur mit solchen Größen diese Operationen vornehmen kann, welche aus gleichartigen Einheiten zusammengesetzt sind.

21) Um bei vorkommenden Fällen nicht immer Addition, Subtraction, Multiplication und Division schreiben zu müssen, ist man übereingekommen, die Zeichen +, —, × und :, zur Bezeichnung dieser Operationen anzuwenden, so heißt 4 + 5, 4 und 5 soll addirt werden, und da dies gleich 9 ist, so schreibt man 4 + 5 = 9. Eben so wäre z. B. 6 Pfd. und 8 Pfd. gleich 6 + 8 = 14 Pfd.

22) Um größere Zahlen zu addiren, muß man folgende Gesetze beobachten:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen so unter einander, daß von der Rechten zur Linken immer die Einfachen, Zehenfachen u. s. w. unter einander stehen, und trennt ihre Reihe durch einen Querstrich, von der sich ergebenden Summe.
2. Nun zähle man die Einheiten einer jeden Reihe zusammen, indem man bei der zur Rechten anfängt.
3. Wenn die Summe der Zahlen einer solchen Reihe mit einer einfachen Zahl ausgedrückt werden kann, so schreibe man sie unter die Reihe unter dem Querstrich.
4. Wenn aber die Summe durch mehrere Zahlen ausgedrückt werden muß, so schreibe man nur die Einheiten unter die Reihe der Einheiten, und addire die Zehner zur zweiten Reihe, und so verfährt man durch alle Reihen.

23) Man soll die Zahlen 494, 2532 und 8743 summiren?

Man schreibe also 494
2532
9743

Summe = 12769

Die Summa der Einheiten der ersten Reihe gibt also die Zahl 9, es kömmt also nichts in die nächste Reihe der Zehner überzutragen. Diese Reihe beträgt 16 Zehner, oder 160 Einheiten, wovon also 6 Zehner in die zweite, und ein Hunderter zur dritten Reihe gehören, daher man auch einen mehr angesetzt sieht, als die Zahlen 4 + 5 + 7 betragen.

Eben so verhält es sich für die vierte Reihe, welche 10 + 2 = tausende entziffert.

24) Auf eben diese Art findet man, daß

0,7
1,89
7,97

Summe = 10,56 ist.

25) Eben so findet man, daß

9478		45,08
4729	und	37,39
47978		8,57
S. = 61185		S. = 91,04 ist.

26) Es ist klar, daß diese Gesetze unfehlbar sind, weil sie die Summe aus kleinen Theilen zusammensetzen lehren, und zugleich das Mittel angeben, sich vor Irrthümer zu schützen, indem man die Zahlen von oben herunter, oder in irgend einer andern Ordnung zusammen zählt, wo dann immer wieder dieselbe Summe resultieren muß.

Aufgaben.

1. Die Bevölkerung irgend einer Stadt, seye 228885, jene einer anderen 223010, und die einer dritten 647472.

Wie viel haben diese drei Städte zusammen Einwohner?

2. Ein Kaufmann hat 5 Stücke Tuch gekauft. Das erste mißt 20,48, das zweite 18,29, das dritte 16,69, das vierte 15,46, und das fünfte 935 Ellen. Wie viel Ellen halten sie alle zusammen?

3. Ein Kaufmann erhält eine Sendung von sechs Ballen Waare. Der erste wiegt 239, der zweite 0,46, der dritte 0,69, der vierte 1,56, der fünfte 2,19 und der sechste 1,27 Zentner, wie viel wiegen sie alle zusammen?

27) Subtraction.

Um den Unterschied zweier Zahlen zu finden, muß man die kleinere von der größeren abziehen.

28) Um 4 von 6 abzuziehen, schreibt man (s. Nro. 12) 6 — 4 = 2, und so ist 16 — 9 = 7.

29) Um größere Zahlen abzuziehen, schreibt man

1. Die kleinere unter die größere in derselben Ordnung, wie bei der Addition, und ziehe eben so einen Querstrich unter beide.

2. Dann ziehe man die untere von den oberen Zahlen in derselben Ordnung ab, und schreibe jedesmal den Rest unter den Strich, unmittelbar unter die Reihe.

3. Wenn sich in der oberen Reihe ein kleinerer Ziffer befindet als in der unteren, so muß man um die Subtraction möglich zu machen, zur kleineren zehen addiren, unter dem Strich den Rest der unteren Ziffer von der so vermehrten Oberen in die Reihe ansetzen, und zur Ausgleichung die im Rest nächstfolgende Ziffer um eins vermehren.

30) Man soll den Unterschied zwischen 50387 und 34583 bestimmen?

Man schreibe als 50387
34583

Differenz = 15804

Die Differenz der ersten Reihe 7 — 3 ist 4, welche man ansetzt, die zweite Differ. 8 — 8 = 0, die dritte kann ohne die 3 zu vermehren, nicht bestimmt werden, man setze also 13 — 5 = 8 im Rest, und vermehre die Zahl 4 um eins, man erhält also wieder 5 — 10 = 5, und endlich 5 — 4 = 1, also 15804.

Die Vermehrung der Zahl 4 um 1 hat folgenden Grund: Indem man die Zahl 3 um eins vermehrt, wird sie, da sie in der Reihe der Hunderte stehet, um 10 hundert vermehrt, man muß also die Zahl 50387, welche um tausend vermehrt wurde, dadurch um eben so viel vermindern, daß man die nächstfolgende Zahl 4 um eins vermehrt, also auch den Subtrahend um tausend vermehrt.

31) Auf eben diese Art findet man, daß die Differenz von

	95381	und	196,47
	85792		89,69
D. =	9589	D. =	106,78

32) Es ist klar, daß, indem man diese Gesetze befolgt, man den Unterschied eines jeden einzelnen Theiles, als auch jenen der ganzen Zahlen findet.

33) Addirt man die gefundene Differenz zur kleineren Zahl, so muß die größere resultieren.

34) So kann auch die Subtraction der Addition zur Probe dienen. Man will z. B. wissen, ob 89,69 + 106,78 = 196,47 ist? — Man ziehe eine der beiden Zahlen von 196,47 ab, so muß die andere übrig bleiben.

Aufgaben.

1. Eine Armee, welche einer anderen entgegen stehet, ist 536400 Mann stark. Die andere ist aber nur 364969 Mann stark. Wie viel ist erstere stärker?

2. Ein Stück Tuch hat 31 Ellen gemessen, davon wurden 13,359 Ellen abgegeben, wie viel mißt es noch?

3. Zwei Ballen Waaren wiegen einer 2 Zentner, der andere 0,0978 Zentner, wie viel ist ersterer schwerer?

35) Multiplication.

Multipliciren heißt mit Hülfe der folgenden Tafel die Addition vereinfachen, indem man unmittelbar eine Zahl so oft wiederholen kann, als es eine andere anzeigt.

Diese Tafel enthält die einfachen Produkte aller einfachen Zahlen, und es ist, um schnell und genau zu rechnen, sehr nothwendig, sie ganz geläufig im Gedächtniß zu haben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	14	18	24	30	36	42	48	54
7	12	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	73	81

36) Um zwei Zahlen mit einander zu multipliciren setzt man sie ihrer decadischen Ordnung nach unter einander und ziehet den Querstrich unter sie, um sie von dem Resultate abzusondern. Man nennt dieses Resultat Product, und die zwei Zahlen Factoren. Von diesen Factoren nimmt man den einen als die multiplicirende Multiplicator, den andern als die zu multiplicirende Multiplicandus an, und rechnet nach der obigen Tafel mit jeder Ziffer des Multiplicators von der Rechten zur Linken das Produkt.

37) Wenn das Produkt der Zahlen, welche gegeben

sind, nur einen Ausdruck gibt, so wird er gleich angesetzt (Nro. 21) $6 \times 4 = 24$.

38) Sind aber in einem der beiden Faktoren, oder in allen beiden mehrere Ziffern gegeben, so muß man die in eine höhere Reihe übergehende Ziffer, wie in der Addition zur nächst folgenden Summe, hier zum nächst folgenden Produkt addiren.

39) Es seye z. B. 7081×9 gegeben, so schreibe man

$$\begin{array}{r} 7081 \\ 9 \\ \hline \mathrm{P.}^{*)} = 63829 \end{array}$$

40) Um zwei zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren, schreibe man beide wie bei der Addition unter einander, ziehe den Querstrich, und bestimme das erste Produkt; da nun das zweite Produkt ein Produkt von Zehnern ist, so muß dessen erstes Glied unter die Zehner des ersten Produkts zu stehen kommen. Das dritte kömmt demnach unter die Zehner des zweiten, oder unter die Hunderter des ersten u. s. w. Endlich werden die Produkte addirt.

41) Es seye z. B. 987×658 zu bestimmen, so setze man

$$\begin{array}{rl} 987 & \\ 658 & \\ \hline 7896 & = p \\ 4935 & = p' \\ 5922 & = p'' \\ \hline 649446 & = P = p + p' + p'' \end{array}$$

42) Dieses Produkt ist also $= 987 \times 8 + 987 \times 50 + 987 \times 600 = 649446$.

*) Wenn man die Zahl 7081, 9mal unter einander schreibt und addirt, erhält man dasselbe Resultat.

43) Um sich zu überzeugen, daß man nicht geirrt habe, setze man 658 × 987, wo dann das nemliche Resultat erfolgen muß.

44) Wenn der Multiplicator, oder das Multiplicandum, oder beide mit einem oder mehreren Nullen enden, d. i. keine Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. w. haben, so lasse man diese während der Operation weg, und setze dem Produkte so viele Nullen nach, als man in den beiden Faktoren weggelassen hat. So ist z. B. 369000 × 8900 = 369 × 89 × 100000, denn 369 wurde tausendmal, und 89 hundertmal kleiner genommen als bedingt war.

45) Wenn einer der beiden Faktoren Nulle zwischen ihren Zahlen haben, so werden sie als leere Stellen betrachtet, und in die nächst höhere Stelle, mit Ansetzung des Uebertrages des vorhergehenden Produkts übergegangen.

Z. B.

```
      397802
      480003
      ------
     1193406
  3182416000
  1591208
------------
190945153406 = P.
```

46) Wenn Dezimal-Größen mit einander zu multipliciren sind, so verfahre man, wie bisher gelehrt wurde, und setze nach der Summirung der Produkte, den Theilungs-Strich so weit von der Rechten zur Linken, als beide Faktoren Dezimal-Stellen haben.

Z. B.

```
    49542
      394
  -------
    78168
  175878
  58626
---------
 7,699648 = P.
```

Da man hier die Zahl 19542, zehentausendmal größer, und die Zahl 394 hundertmal größer genommen hat,

als sie wirklich sind, so muß man also das Produkt um 10000 × 100 = 1000000 kleiner nehmen.

Wenn sich in dem Produkt nicht so viele Ziffern befinden, als Stellen in beiden Faktoren sind, so muß man für die fehlenden Stellen eben so viele Nullen setzen.

$$
\begin{array}{lr}
\text{Z. B.} & 0{,}00020 \\
& 0{,}018 \\
\hline
& 232 \\
& 29 \\
\hline
& 0{,}00000522 = P.
\end{array}
$$

Wenn man eine mit Dezimalen vermischte Zahl z. B. 5,2439 mit 10,000 u. s. w. multipliciren soll, so darf man nur das Scheidungszeichen so weit zurücksetzen, als der decadische Factor Nullen hat. So ist 5,2439 × 10 = 52,439 und 6,42 × 100 = 642. Die Ursache ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen.

Wenn man mit bestimmten Zahlen (Nro. 16) rechnet, so kann eigentlich einer der beiden Factoren nur als eine unbestimmte Zahl betrachtet werden, d. i. anzeigen, wie oft man die bestimmte des andern Factors wiederholen muß.

Man verlangt z. B. zu wissen, wie viel 549 Ellen irgend eines Stoffes kosten, wenn eine Elle 25,39 Gulden kostet, so siehet man leicht, daß es hier darauf ankömmt 25,39 Gld. 549mal zu wiederholen, um die Zahl von Gulden und Dezimalen zu finden, welche das Stück Stoff kostet. Es ist also

25,39 × 549 = 13939,11 Gulden.

Aufgaben.

1. Was kosten 8,0349 Zentner einer Gewürzgattung, wenn ein Zt. 49,67 Gld. kosten?

2. Wenn man für eine Kubicklafter Maurerarbeit 59,25 Gulden bezahlt, was kosten 87,85?

3. Wenn man acht Würfel auf einmal wirft, auf wie vielerlei Art können sie fallen?

Division.

48) Eine Zahl theilen (dividiren) heißt suchen, wie oft eine andere gegebene Zahl in ihr enthalten ist. Man nennt die zu theilende Zahl das Dividendum, die theilende den Divisor, und die resultirende den Quotient. So ist $\frac{8}{4}$ (oder 8 : 4 (Nro. 21) = 2, 8 das Dividend, 4 der Divisor, und 2 der Quotient.

49) Aus der Pythagorischen Tafel (Nro. 35) findet man leicht die Quotienten einfacher Produkte, so ist z. B. nach dieser Tafel 72 : 9 = 8, 42 : 6 = 7 u. s. w.

50) Da in ganzen Zahlen aber der Fall eintreten kann, daß das Dividend keine Zahl ist, welche ohne Rest durch eine andere getheilt werden kann, z. B. 11 : 5, so schreibe man den Quotienten für diesen Fall 2, wie $11 \left| \frac{5}{2} \right.$ an, und ziehe dessen Produkt mit dem Divisor, hier = 10 = 5 × 2 von dem Dividend ab, man erhält also $\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ 10 & \overline{2} \\ \hline 1 & \end{array}$ es bleibt also 1 übrig, was noch mit 5 getheilt werden soll, 5 ist in 11, 2 + $\frac{1}{5}$ mal enthalten. Da nun $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ ist, so $\frac{11}{5} = 2{,}2$, und wirklich 2,2 × 5 = 11.

51) Man nennt alle Zahlen, welche keine anderen Theiler ohne Rest haben, als sich selbst (d. i. die Einheit) Prim-Zahlen, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11 ꝛc.

52) Wenn einer oder beide Zahlen zusammengesetzt sind, so muß man den Quotienten theilweis suchen.

53) Es seye der Quotient einer zusammengesetzten Größe, durch eine einfache zu bestimmen, so schreibe man den Divisor zur Rechten des Dividendum, indem man sie durch einen senkrechten Strich absondert, dann ziehe man einen ho-

rizontalen Strich unter den Theiler, um den Quotienten abzusondern, den man entwickelt. Um ihn zu finden, theile man nach und nach mit dem Divisor alle Theile des Dividends von der Rechten zur Linken, bis das Dividend erschöpft ist. — Um z. B. 7328 : 8 zu bestimmen, schreibe man auf folgende Art:

```
7328| 8
 72 |916
----
  12
   8
  --
  48
  48
```

Es ist nemlich 8 in 73 9mal, was 9 × 8 = 72 gibt, welche von 73 abgezogen 1 im Rest faßt. Man nehme also die nächste Ziffer 2 herunter und eben so den nächsten Quotienten 1, wo 4 im Rest bleiben, und 8 in 48 den letzten Quotienten 6 gibt, es ist also 916 × 8 = 7328 ohne Rest.

Wäre der Divisor in der ersten Ziffer des Theilers schon enthalten, so ist es vor sich klar, daß es nicht nöthig ist, noch die zweite zu nehmen.

54) Um eine zusammengesetzte Zahl mit einer solchen zu theilen, verfährt man wie auf obige Art gezeigt wurde, nur mit dem Unterschiede, daß man immer das Produkt des ganzen Theilers mit dem jedesmal gefundenen Quotienten, von dem Dividend abziehet.

Es seye z. B. 151982 : 495 zu bestimmen, so setze man

```
151982|495
 2485 |307 + 17
------        ---
  3482        495
  3465
  ----
    17
```

Hier ist der 1te Quotient 3, und 3 × 495 = 1485 das erste Produkt, das einen Rest von 34 gibt.

— Setzt man die 8 herab, so findet man, daß 495 in 348 nicht enthalten ist, man setzt also 0 an die Stelle der zu bestimmenden Zehner, und nimmt die Ziffer 2 herab, wo man findet, daß 3482 : 495 = 7 + einen Rest von $\frac{17}{495}$.

55) Das vorgeschriebene Gesetz ist unfehlbar, weil die Zahl auf eben diese Art entwickelt wird, wie sie durch die Multiplication entstanden ist.

56) Um sich zu überzeugen, ob man sich in der Operation nicht geirrt hat, darf man nur den Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und den Rest, wenn einer vorhanden ist, addiren, so muß das Dividendum resultieren.

57) Daß eben so die Division der Multiplication zur Probe dienen kann, folgt unmittelbar hieraus.

58) Wenn man Dezimalen mit einander zu dividiren hat, so rechne man wie mit ganzen Zahlen, nur muß man nach der Operation von der Rechten zur Linken des Quotienten so viele Ziffer abschneiden, als im Dividendum mehr sind, als im Divisor.

So findet man 138,4968, 50,18 = 2,76.

59) Wenn im Quotienten nicht so viele Ziffer entwickelt wurden, als Dezimalstellen bedingt sind, so setze man demselben die nöthige Zahl von Nullen vor: z. B. 0,000036 : 0,004 = 0,009.

60) Wenn man eine Zahl mit 10,000 u. s. w. zu theilen hätte, so darf man derselben nur den Theilungsstrich der Dezimalen, so beisetzen, wie es der decadische Theiler bedingt: So wäre 983,7 : 10 = 98,37 und 734,91 : 100 = 7,3491.

61) Wenn man bestimmte Zahlen zu theilen hat, so nimmt man auf diese Eigenschaft keine Rücksicht, (wenn

nicht Reductionen vorgenommen werden müssen *), und rechnet wie mit unbestimmten.

62) So findet man z. B. daß, wenn 948,51 Gulden unter 27 Personen vertheilt werden müssen, der Theil eines jeden 35,13 Gld. seyn wird; und daß, wenn 72,4 Ellen eines Stoffes 2099 Gld. kosten, die Elle 29 Gld. kosten würde.

Aufgaben.

1. Man hat ein Stück Stoff von 29,7 Ellen mit 7439,85 Gld. bezahlt, was kostet die Elle?

2. 49 Personen haben 249532,5 Gld. mit einander zu theilen, wie viel trifft jeden?

3. Ein Zentner irgend einer Waare kostet 67,5 Gld., wie viele Zentner wird man um 47215 Gld. bekommen?

*) Anmerkung. Diese Reduktionen beziehen sich auf die verschiedenen Unterabtheilungen verschiedener Maaße und Gewichte u. dgl., welche in so vielen hiezu vorzüglich bestimmten Rechenbüchern gelehrt werden, daß ihre specielle Behandlung, welcher doch immer das hier vorgetragene zum Grunde liegt, hier füglich umgangen werden kann.

II. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Zahlen-Größenlehre.

1) Man kann, wenn es sich blos handelt die allgemeinen Gesetze der Größenlehre auszudrücken, auch der Zahl der Einheiten nach, unbestimmte Ausdrücke setzen, indem man statt Ziffer, Buchstaben setzt. So kann z. B. a irgend eine Zahl, und b wieder eine andere Zahl, und s ihre Summe, d ihre Differenz u. s. w. ausdrücken, ohne daß dabei auf die Zahl ihrer Einheiten Rücksicht genommen wird, und man erhält $a + b = s$, d. i. das Ganze ist seinen Theilen gleich, als allgemeines Gesetz für alle denkbaren Zahlen.

2) Eben so wäre $a - b = d$, der allgemeine Ausdruck der Bestimmung der Differenz zweier Größen, und $a = b + d$ das allgemeine Gesetz, daß immer die größere, gleich der kleineren mehr ihrer Differenz seyn muß.

3) Sollen von a mehrere Größen abgezogen werden, z. B. noch c, e, f, g u. s. w., so müßte man schreiben $a - \overline{b + c + e + f + g} = d$, wo der Aufstrich die Beziehung dieser Größen aufeinander (als zur Verständigung des Gesetzes durchaus nothwendig) bezeichnet, daß sie alle von a abgezogen werden müssen.

Man kann sich nun wieder denken, daß $c + e' + f + g \ldots x = m$, d. i. irgend einer Zahl, welche ihre Summe ausdrückt, und es wäre also wieder $a - m = d$ und $a + d = m$, oder $m + d = a$, nachdem $a > m$ oder $m > a$ *), denn es wird nur d, d. i. ihre Differenz gesucht, so daß die kleinere von der größeren abgezogen werden soll, gleichviel ob a oder m sie ist.

5) Da nun a wieder der Ausdruck der Summe einer Reihe unbestimmter Zahlen seyn kann, so siehet man leicht, daß $a - b = d$ der Ausdruck des allgemeinen Gesetzes aller Differenz-Bestimmung ist.

6) Wenn man ferner $a + a + a$ u. dgl. zu addiren hat, so kann man setzen 3a, oder für eine unbestimmte Zahl, statt hier 3, m, oder einen anderen Buchstaben, mit welchen man a, b, c, d u. s. w. multiplicirt denkt, so daß man ma, nb, oc, pd u. s. w. oder auch ab, ac, oc u. s. w., je nachdem zwei oder mehrere Buchstaben mit einander multiplicirt werden sollen; für drei oder mehrere Buchstaben würde man setzen abc, mno u. dgl., wo man zur Vereinfachung das Zeichen $\times$ das zwischen den Buchstaben stehen soll, wegläßt.

7) Wenn $a \times a \times a$ oder sonst ein Buchstabe (m) mal, durch die Zahl seiner Einheiten mit sich selbst multiplicirt wird, wie z. B. $4 \times 4 \times 4 = 64$, so heißt man dieß eine Zahl potenziren, und um nicht $a \times a \times a$ oder $4 \times 4 \times 4$ u. dgl. schreiben zu müssen, schreibt man a^2, 4^3, oder statt $6 \times 6 = 6^2$ oder $b \times b = b^2$ u. s. w. — Allgemein würde also a^m der Ausdruck einer jeden erdenklichen Potenzirung von a seyn.

---

*) Das Zeichen $>$ steht hier statt dem Worte größer, stünde es $a < m$, so stünde es statt dem Worte kleiner.

8) Das Gesetz der Division läßt sich eben so wie in der Arithmetik durch $\frac{a}{b}, \frac{c}{p}$ u. dgl. ausdrücken. Eben so wäre $\frac{mb}{m} = ib = b$, $\frac{op^6}{p^2} = op^{6-2} = op^4 = opppp$, da $\frac{pp}{pp} = 1$.

Dieß von Größen, welche nur einen Ausdruck haben.

9) Mehrtheilige Größen werden für die Addition auf folgende Art behandelt. z. B. $\overline{4a^2 + 9b + 2c} + \overline{2a^2 + 3c + 4d} + \overline{7b + c + e}$. gibt also $\overline{4a^2 + 2a^2} + \overline{9b + 7b} + \overline{2c + 3c + c} + 4d + e = 6a^2 + 16b + 6c + 4d + e$.

Eben so wäre die Summe von $\overline{3fg + 4m^2} + \overline{4mn + 3b^2} = 3fg + 4m^2 + 4mn + 3b^2$, weil in dieser Aufgabe keine gleichen Ausdrücke vorkommen.

10) Die Zahl oder der Buchstabe, welcher anzeiget, daß ein anderer Buchstabe mit ihnen multiplicirt werde, heißt ihr Coefficient.

11) Man nennt die Buchstaben oder Zahlen, welche Potenzirungen anzeigen, Exponenten, so ist z. B. in x^m, a^4, 4^4, m, und 4 der Exponent von x, a und 4. Wir haben in Nro. 7 gezeigt, daß diese Exponenten nur durch Multiplication oder Division der Größen, durch sich selbst, entstehen können, sie bleiben also durch Addition oder Subtraction ihrer Grundgröße unverändert, so wäre $4x^m + 6x^m = 10x^m$, aber $4x^m + 5x^p$ nicht gleichartig und darf daher auch nicht unter einen Ausdruck $9x^m$, oder $9x^p$, oder $9x^{m+p}$ gebracht werden, denn die beiden ersten sind offenbar falsch, und der dritte würde heißen, wenn z. B. $m = 4$, $p = 1$, wäre x^7; wäre z. B. $x = 2$, so wäre $4.16 + 4.8 = 64 + 32 = 96$. x^7 wäre aber $= 128$.

12) In der Addition mehrtheiliger Größen, werden also die Großen, welche durchaus dieselben Buchstaben, und Exponenten haben, mittels ihrer Coefficienten addirt, und alle Uebrigen mit dem Zeichen + (der Add.) verbunden angesetzt wie die obigen Beispiele gezeigt haben.

Aufgabe.

1. Man soll

$\overline{6x + 4xy + 4fz + l^2}$ und $\overline{7ax + x^2y + 4az + 2l}$

2. Ferner

$\overline{3xz + 4xy + 3z^2 + 4ay}$ u. $\overline{6xz + 8xy + 3z^2 + 5ay}$

3. Endlich

$\overline{5ab + 4xy + 7bdf}$ u. $\overline{8abx + xy + 9bdf}$. add.

13) Subtraction mehrtheiliger algebraischer Größen.

Die Subtraction mehrtheiliger albgebraischer Größen bestehet darin, ihre Differenz zu bestimmen.

14) Es bleibt daher in Beziehung der Behandlung gleichnamiger Größen, dasselbe Gesetz, wie in der Addition, d. i. sie können auch hier unter einen Ausdruck gebracht werden, nur müssen die Coefficienten abgezogen werden. Die Ungleichnamigen werden unter dem Gesetz ausgedrückt.

Z. B. Man soll von 12b, 4b abziehen? so ist $12b - 4b = 8b$.

2. Man soll von $\overline{8ab - 7bc}$, $\overline{4ax - 3y}$, abziehen? So ist die Aufgabe $\overline{8ab + 3y} - \overline{4ax + 7bc}$, man könnte auch setzen $\overline{8ab + 3y} - 7bc - 4ax$, nur müssen die Aufstriche die Beziehung der Gliedung im Verband mit den Operationszeichen streng logisch ausdrücken.

3. Man soll $2a^m b^p + \overline{3ac^2 + bd^3}$ von $4a^m b^p + \overline{3ac^2 + bd^3}$ abziehen?

Man erhält also $2a^m b^p$ als Differenz.

15) Das Gesetz ist evident, alle Glieder, welche den Subtrahend vermehren, vermindern das Subtrahendum, und umgekehrt.

16) Eben so wie in der Zifferrechnung, dient hier die Addition der Subtraction zur Probe, denn man darf nur die gefundene Differenz zum Subtrahend addiren, so muß das Subtrahendum erfolgen, denn immer ist $a = b + d$ (Nro. 4.)

Aufgaben.

1. Man soll $9x + 2yz + 2z - 4l^2n$ von $8xy + 9mn + 7l^2 - 4az$ abziehen.

2. Ferner $3abc^2 + xy - 19mn$, von $5abc - \overline{21mn + xy}$, und

3. $9ab + xy - 1$ von $7ab + xy - 1$ abziehen?

18) Multiplication mehrtheiliger algebraischer Größen.

Die Multiplication algebraischer Größen bestehet wie jene in der Arithmetik in Wiederholung eines Factors durch den andern.

19) Es müssen also vier Gesetze berücksichtiget werden:

I. Das Gesetz der Verbindung der Glieder der Factoren.

II. Jenes der Coefficienten (Nro. 10.)

III. Jenes der Buchstaben, und

IV. Jenes der Exponenten.

20) Aus dem ersten Gesetz folgt, daß die Produkte,

mit eben den Zeichen unter sich verbunden werden müssen, mit welchen die Glieder des Multiplicators verbunden sind, jedes eines einzelnen Produkts aber bleibt mit dem Zeichen des Multiplicandum verbunden. Z. B.

I. $a + b \times a + b = \overline{a^2 + ab} + \overline{ab + b^2}$.

II. $a - b \times a - b = \overline{a^2 - ab} - \overline{ab - b^2}$.

III. $a + b \times a - b = \overline{a^2 + ab} - \overline{ab + b^2}$.

IV. $a - b \times a + b = \overline{a^2 - ab} + \overline{ab - b^2}$.

21) Man siehet hier wohl, daß es gleichgültig ist, welche Buchstaben man statt a und b setzt, eben sowohl für einen als für beide Factoren. Eben so kann man auch jede beliebige Zahl setzen. Es würde z. B. $c - d \times m - n = mc - md - \overline{nc - nd}$ (nach II). Wäre nun $c = 6$, $d = 5$, $m = 4$, $n = 3$, so wäre die Aufgabe $6 - 5 \times 4 - 3 = 1$. Nun ist $mc = 24$, $md = 20$, $nc = 18$, $nd = 15$, also $\overline{24 - 20} - \overline{18 - 15} = 4 - 3 = 1$.

Da es im Produkt $\overline{24 - 20} - \overline{18 - 15}$, gleich ist, ob man 15 von 18 abziehet, und dann 3 von $\overline{24 - 20}$, oder ob man $\overline{24 + 15} - \overline{20 + 18} = 39 - 38 = 1$ setzt, so kann dieses Produkt auch auf diese Art geordnet werden, welche man die Transposition nennt.

Diese als unfehlbar nachgewiesenen Gesetze gelten für alle mögliche Fälle der Multiplication algebraischer Größen, indem alle möglichen gegebenen Faktoren nur Summen oder Differenzen seyn können. So ist z. B. $\overline{2a - 4d} \times \overline{3a - d}$ für den Fall II und man erhält $\overline{5a - 12ad} - \overline{2ad - 3d^2}$. Da nun 12ad und 2ad abgezogen werden müssen, so erhält man 14ad, also $5a - \overline{14ad - 4d^2}$ wo man auch nach Nro. 21 $5a + 4d^2 - 14ad$ setzen kann.

Aehnliche Folgerungen zeigen, daß nach I. $\overline{a + b} \times \overline{a + b} = a^2 + 2ab + b^2$. II. $\overline{a - b} \times \overline{a - b} = a^2 - \overline{2ab - b^2} = a^2 + b^2 - 2ab$. III. und IV. $\overline{a \pm b} \times \overline{a \mp b} = a^2 - b^2$.

22) Aus dem Beispiel (Nro. 21) siehet man, daß die Coefficienten des Multiplicands eben so mit jenen des Multiplicators multiplicirt werden müssen, wie man allgemein mit arithmetischen Größen rechnet. Die Factoren werden auf folgende Art angesetzt:

$$\begin{array}{rl} & 2a - 4d \\ & 3a - d \\ \hline & 6a^2 - 12ad \\ ^{*)} & \quad - 2ad - 4d^2 \\ \hline & 6a^2 - \overline{14ad - 4d^2} = 6a^2 + 4d^2 - 14ad \end{array}$$

(vermög Nr. II. Nro. 20).

23) Oefters tritt auch der Fall ein, daß man die Multiplication blos anzeigt, indem man das Zeichen der Multiplication zwischen die Glieder setzt, als $\overline{2a - 4d} \times \overline{3a - d}$, oder auch $(2a - 4d)$ $(3a - d)$ oder auch noch den Punkt wegläßt, und $(2a - 4d)(3a - d)$ setzt.

Es seye $\overline{3a + c - 2b} \times \overline{5a + 3d - 2c}$ bedingt; so siehet man ohne weiters, daß man hier $3a + c = m$, $2b = n$, $5a + 3d = p$, und $2c = q$ setzen kann, es ist $\overline{m - n} \times \overline{p - q}$ bedingt, d. i. der II. Fall. Man könnte also in $mp - mq - \overline{np - nq}$ die Werthe substituiren um das richtige Resultat zu erhalten. Will man aber dies nicht, so ist

$$\begin{array}{l} 3a + c - 2b \\ 5a + 3d - 2c \\ \hline 15a^2 + 5ac - 10ab \\ \quad + \overline{9ad + 3cd - 6bd} \\ \qquad\qquad - 6ac + 2b^2 - 4bc = \end{array}$$

*) D. i. es muß $12ad + 2ad = 14ad$ abgezogen werden.

$\overline{15a^2 + 5ac + 9ad + 3cd} - \overline{10ab + 6bd + 6ac}$
$\overline{+ 2c^2 - 4bc} = 15a^2 + 9ad + 3cd + 4bc -$
$\overline{10ab + 6bd + ac + 2c^2}$.

Aufgaben.

1. Man soll die Produkte von $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \times \overline{a^3 + 2ab^2} - \overline{2a^2b + b^3}$,

2. $(7xy + 2ab - 4yz)\ (5ax + 5byz)$, und

3. $(a + \overline{b - c})\ (a + \overline{c - b}$ bestimmen?

24) Division mehrtheiliger algebraischer Größen.

Das Grundgesetz der Theilung algebraischer Größen ist dasselbe wie in der Arithmetik, d. i. man sucht eine Größe, welche mit dem Theiler multiplicirt, der zu theilenden (Dividend) gleich ist.

25) Es haben hier eben die vier Fälle statt, wie bei der Multiplication und eben so müssen die Glieder des Quotienten im Gegensatz der Multiplication, nach dem Gesetz des Dividends, und jene der theilweisen Produkte durch jene des Divisors verbunden werden.

I. $(ac + bc) + (ad + bd) : \overline{a + b} = \overline{c + d}$

II. $(ac - bc - (ad - bd) : \overline{a - b} = \overline{c - d}$

III. $(ac + bc) - (ad + bd) : \overline{a + b} = \overline{c - d}$

IV. $(ac - bc) + (ad - bd) : \overline{a - b} = \overline{c + d}$

26) Das Gesetz der Coeffizienten ist, sie durch einander zu dividiren.

27) Jenes der Buchstaben ist, daß man jenes des Dividends im Quotienten schreibt, welche nicht im Divisor enthalten sind. Denn sonst könnte das Dividend nicht wieder hergestellt werden.

28) Das Gesetz der Exponenten ist eine natürliche Folge jenes der ersten Buchstaben, und kann daher auch nur bei gleichnamigen Größen in Anwendung kommen. Es bestehet also darin, daß, wenn gleichnamige Größen Exponenten haben, dieselben von einander abgezogen werden müssen. So ist wie schon gezeigt worden $\frac{p^6}{p^2} = p^{6-2} = p^4$, und $\frac{p^6}{p^6} \times \frac{1}{p^2} = 1 \times \frac{1}{p^2} = p^{-2}$ u. dgl. — Ein Exponent mit dem Subtractionszeichen zeigt also immer einen Bruch an, dessen Zähler $= 1$ ist.

29) So ist $4a^2b^4c : 5a^2b^3 = \frac{4}{5}\, a^{3-2}\, b^{4-3}\, c = \frac{4}{5}\, abc$.

Eben so $\frac{6a^3b^4d}{6a^2bcf} = \frac{6abd}{6cf} = \frac{abd}{cf}$, und

$\frac{12a^3b^2}{12a^2b^4} = \frac{1}{b^2} = b^{-2}$, da $\frac{12a^3}{12a^3} = 1$ ist.

30) Hiernach kann also der Quotient mehrtheiliger Größen leicht gefunden werden; nur muß man zur leichteren Uebersicht, das Dividendum und den Divisor so ordnen, daß ein beiden gemeinschaftlicher Buchstabe den größten Exponenten hat.

31) Man soll z. B. $a^3 + 3ab^3 - 3a^3b + b^3$ durch $a^2 + b^2 - 2ab$ theilen? So siehet man aus dem Gesetz (Nro. II. Nro. 25), daß der Quotient eine Differenz seyn muß. Man setze daher wie in der Arithmetik

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 + 3ah^2 - 3a^2b + b^2 & a^2 + b^2 - 2ab \\
\hline
a^3 + ab^2 - 2a^2b - & a - b \\
\hline
\quad 2ab^2 - a^2b + b^3 & \\
\hline
- 2ab^2 + a^2b + b^3 &
\end{array}
$$

Bemerkung. Man kann sich den Rest wie $a^2 + b^3 - 2ab$ geordnet denken, wo dann unmittelbar

$-\overline{a^2b + b^3 - 2ab}$ folgt. Ueberhaupt kann mit Rücksicht der IV Grundgesetze niemals ein falsches Resultat gefunden werden, weil sie alle mögliche Fälle enthalten. Würde man z. B. $a^3 + 3ab^2 = m$, $3a^2b + b^3 = n$, und $a^2 + b^2 = p$, $2ab = q$ gesetzt haben, so wäre $\overline{m - n} \times \overline{p - q} = \overline{mp - np} - \overline{mq - nq}$, dessen Quotient ebenfalls eine Differenz ist, und für unsern Fall $= p - q$ wäre.

32) Die Entwickelung eines Quotienten durch Annäherung gehört noch nicht hieher.

Aufgaben.

1. Man soll $a^4 - b^4 : a - b$ bestimmen?
2. Eben so $a^2 - b : a + b$ und
3. $\overline{a^3 - 3a^2b} + \overline{3ab^2 - b^3} : a^2 - \overline{2ab - b^2}$?

33) Gebrochene Größen.

Theile einer in bestimmte Theile getheilten Größe heißt eine gebrochene Größe. So wird z. B., wenn man irgend eine Linie in a Theile theilt, und hievon b Thelle nimmt $\frac{b}{a}$ der Ausdruck seyn, den man eine gebrochene Größe, oder schlechthin einen Bruch nennt. Wäre z. B. $a = 10$, $b = 6$, so wäre $\frac{6}{10} = 0{,}6$ ein Bruch, die Zahl 10 heißt der Nenner, und 6 der Zähler, weil er anzeigt, wie viele Theile der benannten 10 genommen wurden. Wäre die Linie in 13 Theile getheilt, so würden diese Theile kleiner seyn, und man hatte also $\frac{6}{13}$. Ein Bruch wird also im Verhältniß der Größe seines Nenners, für denselben Zähler kleiner.

34) Verändert sich der Zähler, so wird der Bruch ebenfalls im Verhältniß dieser Veränderung kleiner oder

größer. Kleiner, wenn der Zähler kleiner wird, und größer wenn er größer wird. So ist $\frac{3}{16} < \frac{6}{16}$, und $\frac{9}{13} > \frac{6}{13}$.

35) Vermehrt man den Zähler und den Nenner durch Multiplication um gleich viel, so bleibt der Bruch unverändert. So ist z. B. $\frac{b}{a} \times \frac{p}{p} = \frac{bp}{ap}$ und da $\frac{p}{p} = 1$ $= \frac{b}{a}$, $\frac{6}{13} \times \frac{4}{4} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$.

36) Im Gegensatze ist, wenn man einen Bruch durch Theilung des Zählers und Nenners, mit derselben Zahl verkleinert, der Bruch unverändert, d. i. $\frac{2a}{2p} : 2 = \frac{a}{p}$: $\frac{24}{52} : 4 = \frac{6}{13}$. Wäre aber $\frac{2a : 2}{2p}$ $\frac{a}{2p}$ so würde er verkleinert, und $\frac{2a}{2p : 2} = \frac{2a}{p}$ vergrößert.

37) Man hat also, wenn man irgend eine Zahl a, als Bruch mit einem Nenner b ausdrücken will $a \times \frac{b}{b} = \frac{ab}{b} = a$.

Eben so wäre $a^2 + \frac{2n^2}{b - c} = \frac{\overline{a^2b - a^2c + 3n^2}}{b - c}$.

Wenn man also Brüche von verschiedenen Nennern auf gleiche Nenner bringen will. z. B. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, so müßte man um ihre Werthe unverändert zu erhalten, setzen $\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bfd}$ und eben so würden die Brüche $\frac{a - b}{c}$ $\frac{m}{d - y}$ auf gleiche Nenner gebracht $\frac{cm}{cd - by}$ und $\frac{\overline{ad - bd} - \overline{ay - by}}{cd - cy}$ werden; d. i. man müßte jedem Bruch einen Nenner geben, der das Produkt aller

Nenner wäre, und dann jeden Zähler mit eben der Zahl multipliciren, mit der man seinen Nenner multiplicirt hat.

38) Die Summe der Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{f} + \frac{d}{h}$ wäre also $\frac{afh + bch + bfg}{bfh}$.

39) Die Differenz der Brüche $\frac{a}{b} - \frac{n}{p}$ wäre also $\frac{ap - bn}{bp}$.

40) Multiplicirt man die beiden Brüche $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, so erhält man $\frac{ac}{bd}$ und eben so ist $(m + \frac{x}{y})$ $(n + \frac{p}{9} = \frac{mnqy + nyx + mpx + px}{qy}$.

41) Der Quotient von $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, der Gegensatz von $\frac{ac}{bd}$.

Der vereinfachte Ausdruck von $\frac{ac + bc}{a^2 - b^2}$ ist eben so $\frac{ac + bc}{a^2 - b^2} : a + b = \frac{c}{a - b}$.

43) So wäre also $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{6}{7}$ unter einerlei Nenner gebracht, vermög (Nro. 38) $\frac{56}{168}, \frac{21}{168}, \frac{144}{168}$.

Ihre Summe $\frac{56 + 21 + 144}{168} = \frac{221}{168} = 1 + \frac{53}{168}$ (nach Nro. 38).

Die Differenz von $\frac{56 - 21}{168} = \frac{35}{138}$ (nach Nro. 39).

Das Produkt von $\frac{1}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{21}$ (nach Nro. 40).

Der Quotient von $\frac{1}{3} : \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{18}$ — (nach Nro. 41).

44) Will man einen Bruch wie z. B. $\frac{3}{4}$ auf einen Bruch bringen, der mit demselben Werth ein zehentheiliger Bruch ist, so hänge man an den Zähler eine Nulle an, und man erhält $\frac{30}{4}$, dies gibt einen ersten Quotient $= 7$, der aber um das Zehnfache zu groß ist, es ist also 0,7, hier bleibt aber ein Rest $30 - 7 \times 4 = 30 - 28 = 2$, welchem man wieder eine Nulle anhängt, also $\frac{200}{4} = 50$ erhält, welches mit 100 dividirt 0,05 ohne Rest gibt, der ganze Quotient ist also $0{,}7 + 0{,}05 = 0{,}75$, und wirklich ist $\frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$. —

Eben so findet man, daß $\frac{4}{5} = 0{,}8$ und $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

45) Aus der Natur der Zahlen geht hervor, daß der neue Zähler nicht immer völlig genau bestimmt werden kann, wie z. B. $\frac{1}{3}$, wo man ohne Ende erhält 0,333....; man nimmt in diesen Fällen so viele Dezimalstellen als der bezweckte Grad von Genauigkeit erfordert. Wäre z. B. die Einheit ein Fuß, so wären hier für den dritten Theil des Fußes nur 0,0003 abgängig u. s. w., wenn man nur auf tausend Theile genau rechnen will.

46) Man kann also nun mit solchen Brüchen, mit Berücksichtigung ihrer Nenner, wie mit ganzen Zahlen rechnen, so wäre z. B.

$$0{,}75 + 0{,}3333\,.. = 0{,}0833$$
$$0{,}75 - 0{,}3333\,.. = 0{,}4169$$
$$0{,}75 \times 0{,}3333\,.. = 0{,}249975$$
$$0{,}75 : 0{,}3333\,.. = 2{,}25.$$

Diese Gesetze sind schon in dem I. Abschnitt nachgewiesen worden. Ein näheres aber wenig Anwendung findendes Detail über periodische Dezimalbrüche, und Auflösung der Brüche in Kettenbrüche findet sich in allen Lehrbüchern der Arithmetik.

47) Der allgemeine Ausdruck der Entwickelung eines Bruches $\frac{p}{p \pm x}$ und jeder algebraischen gebrochenen Größe, der Bruch seye ein eigentlicher Bruch oder nicht, d. i. es seye $p \pm x > p$, oder $p \pm x < p$ ist, wenn Q eine ganze Zahl, oder $= 0$ ist, $q, q', q''\,..$ — rc. die successiven Quotienten der Theilung des Zählers, durch den Nenner, und $m = 10$ ist

$$\frac{p}{p \pm x} = Q + \frac{mp}{m(p \pm x)} + \frac{m(mp - (p \pm x)q}{m^2(p \pm x)}$$
$$+ \frac{m[m(mp - (p \pm x)\,q - (p \pm x)q']}{m^3(p \pm x)} + \text{rc.}\ ^{*)}$$

Z. B. es seye $p = 6$, $x = 1$, so erhält man

$$0, + 0{,}8 + 0{,}05 + 0{,}007 = 0{,}857.$$

Das Gesetz dieser Reihe ist höchst einfach, und sie bleibt immer summarisch.

---

*) Diese Form ist ganz neu, und giebt der Theorie der Reihen eine viel einfachere und evidentere Entwickelung, als die von falschen Resultaten strotzende Entwickelung der Reihen, welche bisher in Anwendung kam.

Aufgaben.

1. Welches ist der Quotient von $17 \frac{3}{4} : 8 \frac{9}{10}$?

2. $9 \frac{1}{4}$ Cubicklafter Mauerwerk haben $327 \frac{9}{22}$ Gulden gekostet, was kostet einer?

3. Der Bruch $\frac{ac + bc}{a^2 - b^2}$, auf den Ausdruck der Formel in Nro. 47 zu bringen, und dessen Werth zu bestimmen, wenn $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$ ist?

48) Von Potenzen und ihren Wurzeln.

Wir haben in dem Nro. 7 des zweiten Abschnittes gesehen, wie aus einfachen Zahlen oder Buchstaben, Potenzen entstehen, und wie man sie allgemein ausdrückt, und eben so kömmt man von einer einfachen Potenz durch Theilung durch sich selbst auf ihre Wurzel zurück.

49) Das Zeichen, dessen man sich bedient, um anzuzeigen, daß man die Potenz irgend einer Größe wieder auf ihre Wurzel zurückführen soll, ist $\sqrt{\ }$, so bezeichnet $\sqrt{a^2}$, die Zurückführung auf a, also $\sqrt{a^2} = a$; dieß für die zweite Potenz. Will man a^3 auf a zurückführen, so schreibt man $\sqrt[3]{a^3} = a$, und für $\sqrt[5]{b^5} = b$ u. s. w.

50) Man könnte auch suchen wollen, was $\sqrt[5]{a^3}$ wäre, und hier verliert der Exponent von a seine Bedeutung, denn man kömmt auf eine viel kleinere Größe als a, so ist z. B. wenn $a = 2$, $a^3 = 8$, und $\sqrt[5]{8} = 1,515$ . .

51) So wäre also $\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}$, was man wie $\sqrt[3]{a^{-3}}$ schreibt $= \frac{1}{a}$.

52) Man kann auch das Wurzelzeichen weglassen, und

statt z. B. $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$ schreiben, und allgemein $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

52) Wenn man die Ausziehung der Wurzel, aus einer mehrtheiligen Größe anzeigen will, so geschieht dieß auf dieselbe Art: z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 - 3d + e}{c^2 - b^2}} = \frac{(a^2 - 3d + e)^{\frac{1}{3}}}{c^2 - b^2}, \text{ u. s. w.}$$

54) Wir haben gezeigt, daß das Produkt von $a + b \times a + b$, aus dem Quadrat des 1ten Theils a^2, mehr aus dem Produkt des 1ten Theils in den 2ten, zweimal genommen, $2ab$, und aus dem Quadrat des zweiten Theils b^2 bestehe.

55) Wenn man also aus einer mehrtheiligen Größe die Quadratwurzel ausziehen will, so muß man die Factoren von $a^2 + 2ab + b^2$ entwickeln. Es seye z. B. $\sqrt{4a^2 + 4ax + x^2}$ rc. zu bestimmen, so suche man die Quadratwurzel des 1ten Theils, welche $2a$ ist, und ziehe dieses Quadrat ab, so bleibt $4ax + x^2$, worin also noch der Theil $2ab + b^2$ enthalten seyn muß: Da nun hier die Wurzel des 1ten Theiles $2a$ ist, so muß man also mit $4a$ dividiren, wo man x als Quotient und x^2 als dessen Quadrat findet, es ist also $\sqrt{4a^2 + 4ax + x^2} = 2a + x$.

Der Gang der Operation würde so stehen:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{4a^2 + 4ax + x^2} & 2a + x \\ - 4a^2 & \\ \quad + 4ax + x^2 : 4a & \\ \quad - \underline{4ax + x^2} & \\ \qquad - & \end{array}$$

Eben so würde man finden, daß $\sqrt{x^6 + 6x^5 + 9x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4} = x^3 + 3x^2 + 2$.

56) Fände sich nach Ausziehung der Wurzel ein Rest,

so setzt man ihn unter das Wurzelzeichen, und verbindet ihn durch das Zeichen der Addition mit der gefundenen Wurzel.

57) Wäre dieß auf bestimmte Zahlen angewandt, so würde $\sqrt{64 + 64 + 16} = 8 + 4$; denn $8^2 = 64$ also $a = 8$, und $2a = 16$, dieß in 64 gibt 4, also $2ab = 64$, und $b^2 = 16$.

58) Drückt man diese Formel in der decadischen Ordnung aus, indem man $m = 10$ setzt, und a die Einheiten ausdrückt, so erhält man $\overline{mb^2} + 2mba + a^2$, und so wäre $\sqrt{144}$, $4 = 2^2$, also substituirt $\overline{mb^2} = 100$, $2mba = 40$, $a^2 = 4$ als $100 + 40 + 4$, also kann b keinen andern Werth haben als 1. Wäre $\sqrt{625}$ zu bestimmen, so findet man $a = 5$ und die Formel wird $100 + 100 + 25$, man siehet also gleich, daß $b = 2$ seyn muß, wo man erhält $400 + 200 + 25 = 625$, und $\sqrt{625} = 25$.

59) Mittels der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ findet man $\sqrt{144}$ auf folgende Art: man theilt, von der Rechten zur Linken, die Zahl zu 2, man erhält also 1̇44, wo $1 = a^2$ ist, also $a = 1$, ziehet man $a^2 = 1$ ab, so bleibt 44, welches durch $2a = 1$ getheilt gibt $44 : 2 = 2$ für 2ab also $2 \times 2 = 4$ und für b^2 ebenfalls 4: es ist also

$$\begin{array}{l} \sqrt{144}\,|\,12, \\ \;\;1 \\ \hline -\;44 : 2 \\ \;\;\;44 \\ \hline \end{array}$$

Eben so fände man, daß $\sqrt{49534} = 222$, denn 4,95,34 gibt 2 als a, dann bleibt 95 herab zu nehmen, welches mit 4 getheilt, gibt $95 : 4$, $2 = b$ gibt, und $2ab = 8$, und $b^2 = 4$, es bleibt also ein Rest von 11, zu welchen die letzten zwei Stellen 34 herabgesetzt werden, man hät

also 1132, welche mit 44 = 2a getheilt werden müssen, man erhält also wieder 2 zum Quotient. Es ist also $\sqrt{49534} = 222 + \sqrt{250}$.

60) Man kann sich dieser Wurzel dadurch annähern, daß man die Operation mit Dezimalen fortsetzt, die Rechnung stünde also:

```
4,95,35 | 222,56
4
———
 95 : 4
 84
———
 1134 : 44
  884
———
  250,00 : 444
  22205
      2
———
  277500 : 4450
  267006
       3
———
```

d. i.: man setzt die Rechnung wie mit ganzen Zahlen fort, nur muß man, da keine vorhanden sind, immer 2 Nullen herabnehmen, je nachdem man einen gewissen Grad von Genauheit erreichen will, z. B. hier Hunderttheile.

61) Es ist also bei Anwendung dieser Formel zu bemerken, daß der 1te Theil a^2 nur einmal bestimmt werden kann; 2tens daß die ganze Zahl, welche man als Wurzel gefunden hat, z. B. hieoben, 2, 22, 222, 222,5, immer successiv als a in ab genommen werden müssen, und also, daß $2ab + b^2$ so lange entwickelt wird, als es die Zahl zuläßt oder die Annäherung bedingt.

62) Die Wurzel eines Bruches ist also nach (Nro. 53) die Wurzel aus Zähler und Nenner. So ist $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

60) Die Wurzel eines Dezimalbruches ist die Wurzel seiner Ziffer mit Vorsetzung einer Nulle. So ist $\sqrt{016} = 0,4$. $\sqrt{0,469} = 0,684$ (nach Nro. 60).

64) Wenn man $a^2 + 2ab + b^2$ mit $a + b$ multiplicirt, so erhält man $a^3 + 3a^2b + b^3$, als $(a + b)^3$. Man siehet ohne weiters, daß diese Formel den Cubus des 1ten Theils, das dreifache Quadrat des 1ten Theils in den 2ten, mehr das dreifache Quadrat des 2ten Theils in den 1ten, und den Cubus des dritten Theils enthält.

Wenn man also die Cubicwurzel aus irgend einer Größe ausziehen will, so müssen diese Theile der Grundformel entwickelt werden. So würde man finden, daß

$\sqrt[3]{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3} = 2a + b$ seye.

65) Wenn nach der Operation ein Rest bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Cubicwurzel mehr als zwei Glieder hat, oder daß die gegebene Potenz keine reine Potenz ist.

66) Findet man nun, daß die gesuchte Wurzel mehr als zwei Glieder hat, so muß man wie bei Ausziehung der Quadratwurzel, und aus denselben Gründen, die beiden erst gefundenen Glieder als a, und mit $3a^2$ die Entwickelung fortsetzen.

So würde man also für obige Aufgabe (Nro. 64) so operiren:

$$\begin{array}{l|l} 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 & 2a + b \\ -\,8a^3 & \\ \hline \quad 12a^2b + 6ab^2 + b^3 : 6a^2 & \\ -\,12a^2b + 6ab^2 + b^3 & \end{array}$$

Es ist klar, daß hier $8a^3 = (2a)^3$ (a^3 der Formel) $12a^2b = (3a^2b$ der Formel) $6ab^2 = (3ab^2$ der Formel) und $b^3 = (b^3$ der Formel).

67) Theilt man 1728, weil eine mehrtheilige Cubiczahl, wenigst aus vier Ziffer bestehen muß, von drei zu drei Ziffern, von der Rechten zur Linken, so erhält man 1,728. Es ist also hier $1 = a$, und $1 = a^3$, der Rest ist 728; dieser mit $3a^2 = 3$ in 7 getheilt, gibt für $b = 2$, dann ist $3ab^2 = 12$, und $b^3 = 8$. Es ist also

```
 1728 | 12
 1
 ————
  728 | 3
  62
  1
    8
 ————
  —
```

68) Wenn man die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ decadisch entwickelt, so erhält man

$$\overline{mb^3} + \overline{3mb^2a} + 3mba^2 + a^3.$$

In 1728 fände sich unmittelbar $a = 2$, folglich $1000 + 600 + 120 + 8 = 1728$. Man siehet also, daß hier $b = 1$ seyn muß.

69) Bei Brüchen verhält es sich mit Ausziehung der Cubicwurzel, wie mit der Quadratwurzel, man zieht sie nemlich aus Zähler und Nenner. So ist z. B.

$\sqrt[3]{\frac{3}{27}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{1728}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ u. s. w.

70) Für Dezimalbrüche hat dasselbe Gesetz statt, wie mit ganzen Zahlen, nur daß hier ebenfalls die Nulle vorgesetzt wird. So ist $\sqrt[3]{0{,}6}$ durch Annäherung 0,184.

Aufgaben.

1. Man soll die Cubicwurzel von 79 auf Hunderttheile genau bestimmen.

2. Man soll dasselbe für $65\frac{43}{47}$, und

3. Dasselbe für $29\frac{11}{13}$ bestimmen?

Bemerkung. Da es einfachere Wege gibt, diese Aufgaben zu lösen, da ferner ein Körper nicht mehr als drei Dimensionen hat, so kommen Ausziehungen von höheren Wurzeln selten vor, und wenn sie vorkommen, so wählt man Wege zur Auflösung der Aufgabe, welche die bisher gezeichneten entbehrlich machen, wir wollen daher noch die Bestimmung

der 4ten Wurzel von 390623 mittels der decadischen Formel geben, über welche Art der Darstellung allgemeiner Formeln, in diesem Gesetze, in einem folgenden Bande noch mehr vorgetragen werden wird.

Diese Formel ist für die 4te Potenz

$$\overline{mb^4} + \overline{4mb^3a} + \overline{6mba^2} + 4mba^3 + a^4.$$

Es ist leicht zu beurtheilen, daß hier $a = 5$, man erhält also $a^4 = 625$, und da $b = 1$ gesetzt

$$10000b^4 + 20000b^3 + 15000b^2 = 500000.$$

Also unmittelbar $b = 2$, also $390625 = (25)^4$, oder auch für $\sqrt[4]{20736}$, da hier $a = 2$ leicht zu finden ist,

$$10000 + 8000 + 2400 + 320 + 16 = 20736.$$

Es ist also $b = 1$ und $\sqrt[4]{20736} = 12$ u. s. w.

71) Die Binomial-Formel.

Die Binomial-Formel lehrt, mittels einer algebraischen Reihe eine jede Potenz oder Wurzel eines Binomiums $x + a$, also $(x + a)^m$, oder $(x + a)^{\frac{1}{m}}$ finden. Diese Formel begründet sich auf das Gesetz der Exponenten, und jenes der Coefficienten, einer Binomial-Potenz, und ist wie die gegebenen Formeln (Nro. 54 u. 64 u. s. w. zeigen.

1. Daß das 1te Glied sich immer in seiner höchsten Potenz befindet, und dann in jedem folgenden Glied dessen Exponent abnimmt, bis er $= 0$ wird.
2. Daß das 2te Glied nach eben dem Gesetz zunimmt.
3. Daß man um die Coefficienten der aufeinander folgenden Glieder zu finden, den Exponenten der vorgehenden Glieder von x, mit dessen Coefficienten multipliciren, und dann durch die Zahl der vorhergehen-

den Glieder dividiren muß. — Man erhält also allgemein

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \times m - 1}{2} a^{m-2}b^2 + \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} a^{m-3} + {}_3q$$
$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} a^{m-4}b^4 + \text{rc.}$$

Setzt man in dieser Formel $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$, $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ u. s. w. So erhält man

$$(a + b)^m = a^m + \frac{ma^m b}{a} + \frac{m \times m - 1}{2} \frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m \times (m-1) \times (m-2)}{2 \times 3} \frac{a^m b^3}{a^3} + \text{rc.}$$

Setzt man wieder $\frac{b}{a} = q^2$, $\frac{b^2}{a^2} = q^2$ $\frac{b^3}{a^3}$ q^3. . . . rc. und $a^m = A$, so wird, diese Werthe substituirt, obige Formel $= (a + b)^m = A + mAq + \frac{m \times (m-1)}{2} Aq^2 + \frac{m \times (m-1) \times (m-2)}{2 \times 3} Aq^3 + \text{rc.}$

Setzt man wieder $mAq = B$, so wird $\frac{m \times (m-1)}{2}$ Aq^2, oder $\frac{(m-1) \times m}{2} Aq. q = \frac{m-1}{2} Bq$. Seye ferner $\frac{m-1}{2} Bq = C$, so ist $\frac{m \times (m-1)(m-2)}{2 \times 3} Aq^3 = \frac{m-2}{3} Cq$ u. s. w. — Man erhält also $(a + b)^m =$ (a^m oder A) $+ mAq + \frac{m-1}{2} Bq + \frac{m-2}{3} Cq +$

$\frac{m-2}{4}$ Dq + ꝛc. Man soll z. B. $\sqrt[5]{(x^2 - y^2)} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{5}}$ bestimmen, so wird $q = \frac{y^2}{x^2}$ 1°. $a^m = (x^2)^{\frac{1}{5}} = A$. 2° $mAq = \frac{1}{5} x^{\frac{2}{5}} \times \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{5x^2} \times x^{\frac{2}{5}} = B$ 3° $\frac{m-1}{2} Bq = \frac{2}{5} \times \frac{y^2}{5x^2} \times x^{\frac{2}{5}} \times \frac{x^2}{y^2} = \frac{2y^4}{25x^4} \times x^5 = C$, u. s. w.

Da nun alle Werthe in y abgezogen werden müssen, so wird $\sqrt[6]{(x^2 - y^2)} = x^{\frac{2}{5}} \times [1 - (\frac{xy^2}{5x^2} + \frac{2y^4}{25x^4} + \frac{6y^6}{125x^6}$ + ꝛc.)]

Aufgaben.

1. Man soll die $\sqrt{(bc^3 + d)}$, dann
2. $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ und
3. $(a^s - x^3)^{\frac{1}{3}}$ bestimmen?

Bemerkung. Da auch diese Formel durch eine besondere Reihen-Entwickelung umgangen werden kann, und ihr letztes Detail in jedem Lehrbuche gefunden wird, überdieß auch nur höchst selten Anwendung findet, so mag das Gegebene für den vorgesetzten Zweck hinreichen.

72) Aus den entwickelten Gesetzen des Coefficienten dieser Formel folgen einige nützliche Anwendungen für die Combinations- und Permutations-Lehre.

73) Bekanntlich unterscheidet sich die Combination von der Permutation darin, daß das Ganze immer seinen unveränderten Werth erhält, in dem sich die Ordnung seiner Theile ändert, indessen in der Permultation, die Theile

eines Ganzen 1 zu 1, 2 zu 2, 3 zu drei u. s. w. verglichen werden. Z. B.

74) Es bestehe eine Lotterie, wo man auf Extract, Ambô, Tern, Quatern und Quintern spielen kann. Man will wissen, wie viel man mit 6 Nummern Ambo machen kann? Der Coefficient $\frac{m \times m - 1}{2}$ der 1ten Formel (Nro. 71) drückt die Combination einer Zahl Nummern, 2 zu 2 genommen aus, da also hier $m = 6$, so erhält man $\frac{6 \times 4}{2} = 15$. Es sind also 15 Amben in 6 Nummern.

Eben so ist der Coefficient, welcher der Combination von 3 zu 3 Nummern ausdrückt $\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3}$, also hier $\frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$, also enthalten 6 Nummern 20 Ternen u. s. w.

Wenn 10 Personen so lange mit täglich veränderten Plätzen mit einander an einem Tische speisen wollten, bis sie wieder jeder an seinem vorigen Platze säßen, so müßten sie noch 9942 Jahre leben.

Denn wirklich zwei Dinge 2mal versetzt werden, z. B. ab und ba.

Drei können 6mal versetzt werden, abc, acb, bac, bca, cab, cba. Eben so findet man, daß 4 Buchstaben 24mal, und m Buchstaben $m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4 \times$ ꝛc. Also zehen Buchstaben $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3\ 2 \times 1 = 3628800$ versetzt werden können, was mit 365 getheilt 9942 Jahre beträgt.

75) Von den irrationellen Größen.

Die leichteste Art mit Irrational-Größen zu rechnen, ist, wenn man sie durch gebrochene Exponenten ausdrückt. Mittels

dieser einfachen Vorbereitung kann man mit incommensurablen (oder irrationellen) Größen alle Operationen vornehmen.

Es seyen z. B. die beiden (irrationellen) Größen $\sqrt[n]{x}$, und $\sqrt[m]{y^{-1}}$ gegeben, so setze man erstere $= x^{\frac{1}{n}}$, und letztere $= y^{-\frac{1}{m}}$ und man siehet ohne weiters:

1. Daß ihre Summe $= x^{\frac{1}{n}} + y^{-\frac{1}{m}}$,
2. Ihre Differenz $= x^{\frac{1}{n}} - y^{-\frac{1}{m}}$.
3. Ihr Produkt $= \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ (da $y^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}}$).
4. Ihr Quotient $= \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{y^{\frac{1}{m}}}}$.
5. Potenz p $= x^{\frac{1}{n.1}.p}$, $y^{-\frac{1}{m}.p}$.
6. Ihre Wurzel r $= x^{\frac{1}{n}.1}$, $y = {}^{-\frac{1}{mr}}$.

76) Diese Art mit irrationellen Größen zu operiren heißt die Rechnung der Potenzen mittels ihrer Exponenten.

77) Man kann auch mit diesen Größen rechnen ohne sie von ihren Wurzelzeichen zu befreien. Man nennt diese Rechnungsart, die Rechnung mit Wurzelgrößen.

78) Man nennt ähnliche Wurzelgrößen solche, welche gleiche Exponenten haben, als $3\sqrt{a}$, und $5\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{p}$, $2\sqrt[n]{p}$ u. dgl.

79) Oefters aber ist es nöthig, gegebene ungleichnamige Wurzelgrößen auf gleiche Wurzelexponenten zu bringen, um

mit ihnen operiren zu können, und zu diesem Zwecke muß man nach denselben Gesetzen verfahren, wie man Brüche unter einerlei Nenner bringt. So wird also, wenn man $\sqrt[3]{a^2c}$ und $\sqrt{b}$ unter einerlei Nenner bringen will $\sqrt[6]{a^4a^2}$ u. $\sqrt[6]{b^3}$ resultieren, ohne daß beide Größen ihre Werthe verändert haben.

80) Die Resultate der mit ihnen vorgenommenen Operationen müßen ganz denen mit gebrochenen Exponenten gleich seyn. So ist

81) Die Summe von $3\sqrt{a}$ und $2\sqrt{b} = 3\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$.

82) Die Differenz $= 3\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$ und $3\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$.

83) Das Produkt $4\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt[3]{5} = 8\sqrt[3]{10}$.

84) Der Quotient $8\sqrt[3]{10} : 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{2}$.

85) Wenn die gegebenen Wurzelgrößen verschiedene Exponenten haben, so muß man sie, um sie zu multipliciren, auf gleiche Nenner bringen. So wird

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m b^n}.$$

86) Um Wurzelgrößen derselben Potenz mit einander zu theilen, muß man mit ihnen verfahren, als wenn sie keine Wurzelzeichen hätten, und dann dem Resultat das gemeinschaftliche Wurzelzeichen vorsetzen. So ist

$$\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}} = \tfrac{1}{3}. \quad \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{a}. \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

87) Wenn die Wurzelgrößen verschiedene Nenner haben, so muß man sie, wie in der Multiplication auf gleiche Nenner bringen. Es seye $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b}$, so erhält man $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}$.

88) Um eine Wurzelgröße zu potenzieren, muß man den Coefficienten vor dem Wurzelzeichen, und die Größe unter dem Wurzelzeichen potenzieren.

So wäre $(2\sqrt[5]{a})^2 = 4\sqrt[3]{a^2}$, und $(\sqrt[n]{b})^3 = \sqrt[n]{b^3}$. Eben so wäre $\sqrt[m]{a^m} = a$, und $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$ u. dgl.

89) Um eine gegebene Wurzel aus einer Wurzelgröße zu ziehen, muß man, im Gegensatze der Multiplication, die Wurzel aus dem Coeffizienten, und aus der Größe unter dem Wurzelzeichen ziehen.

So ist $(4\sqrt[3]{{}^2})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[3]{a}$, ferner $(\sqrt[m]{b^3})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[m]{b}$, u. $(8\sqrt[4]{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt[4]{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}}}$.

90) Wenn irrationelle Größen in Factoren zerlegt werden können, deren einige vom Wurzelzeichen befreit werden, so ist dieß ein Mittel, den Ausdruck zu vereinfachen.

So ist $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, und $\sqrt{75ab^{\circ}} = \sqrt{25b^2} \times \sqrt{3ab}$, und allgemein $\sqrt[m]{a^m}\ \sqrt[m]{ab} = a\sqrt[m]{ab}$.

91) Auf alle Fälle, wenn sich bei Rechnung mit Wurzelgrößen Schwierigkeiten finden, so reducire man sie auf gebrochene Potenzen.

Von den Verhältnissen.

92) Wenn vier Größen sich aufeinander so beziehen, daß sie nacheinander geordnet, wie z. B. $a : b :: c : f$ die Eigenschaft haben, daß $a + f = b + c$, so nennt man ihr Verhältniß, oder ihre Beziehung zu einander, ein Arithmetisches.

93) Derselbe Fall kann auch statt haben, wenn $a : b :: b : f$ stünde, nur müßte hier $b = c$, oder f eine solche

Zahl seyn, daß $a - 2b = f$ wäre. Man nennt ein solches Verhältniß ein stättiges (continuirendes).

94) Es ist also sehr leicht, wenn das vierte Glied unbekannt wäre, was wir mit x bezeichnen wollen, dasselbe zu finden; denn es ist immer $x = b + f - a$, oder $x = 2b - a$.

95) Wäre x ein mittleres Glied, so wäre $f + x = b + c$, also $x = b + c - f$, oder $x = \frac{a + c.}{2}$

Wäre also in Zahlen 7 : 10 :: 9 : 12, und also $7 + 12 = 9 + 10$. Oder auch 8 : 10 :: 10 : 12 und $8 + 12 = 20$.

Wäre z. B. $9 = x$, so wäre 7 : 10 :: x : 12, also $7 + 12 - 10 = x = 9$. Oder im 2ten Falle $10 = x$, $x = \frac{8 + 12}{2} = 10$.

96) Eine in demselben Gesetz fortgesetzte Reihe von Gliedern heißt eine arithmetische Progression, und ihre Eigenschaft ist, da der Unterschied aller Glieder zu einander gleich ist, wenn man das erste Glied mit a bezeichnet, daß alle Glieder, welche auf einander folgen, a, $\overline{a + d}$, $\overline{a + 2d}$, $\overline{a + 3d}$, $a + 4d$ u. s. w. seyn werden, wenn d den Unterschied der beiden ersten Glieder bezeichnet.

Es wäre z. B. $a = 3$, $d = 2$, so ist 3, $\overline{3 + 2}$, $3 + 4$, $3 + 6$ u. s. w.; die arithmetische Reihe 3 . 5 . 7 . 9 u. s. w., also $2a + 3d = 2a + 3d$, und $6 + 6 = 6 + 6 = 3 + 9 = 5 + 7$.

97) Ist die Reihe abnehmend, so ist a, $\overline{a - d}$, $\overline{a - 2d}$, $\overline{a - 3d}$, $a - 4d$ u. s. w. Wäre z. B. a 20, $d = 4$, so ist 20, $20 - 4$, $20 - 7$, $20 - 12$, $20 - 16$ u. s. w. Die Reihe wäre also 20 . 16 . 12 . 8 . 4, $a - 5d$ wäre also $20 - 20 = 0$.

98) Wenn man die allgemeine Reihe, a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$, mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so wird man sehen, daß irgend eines ihrer Glieder gleich ist dem ersten Glied, mehr der Differenz, multiplicirt mit Zahl aller vorhergehenden Glieder. So ist in der Reihe 3 . 5 . 7 . 9 ꝛc.; das 3te Glied $= 3 + 2 \times 2$, und in der Reihe 20 . 16 . 12 . 8 . 4, $8 = 20 - 3 \times 4$ u. s. w.

99) Es ist allgemein, das Glied dessen Stelle bezeichnet, ist $= a + d \times (n - 1)$.

100) Man erhält also $d = \frac{a}{n - 1}$, d. i. z. B. Wenn $a = 20$, $n = 5$, $d = \frac{20}{5} = 4$.

101) Ferner ist die Summe aller Glieder gleich der halben Summe des ersten und letzten Gliedes, multiplicirt mit der Zahl der Glieder; denn wenn man $a + 2d = \frac{(2a + 4d)}{2}$ (Summe des 1ten und letzten Gliedes) mit 5 der Zahl der Glieder multiplicirt, so erhält man $5a + 10d$ = der Summe der Glieder.

Man siehet wohl, daß man dasselbe Resultat erhalten würde, wenn man die Summe der äussern Glieder, durch die halbe Summe aller Glieder, oder das halbe Produkt der äussern, mit der Zahl aller Glieder multipliciren würde.

102) Wenn die Anzahl der Glieder ungerad ist, so findet man die Summe aller Glieder, wenn man das mittlere Glied mit der Zahl aller Glieder multiplicirt. Wirklich ist $a + 2d = \frac{2a + 4d}{2}$.

Nach diesem ist es leicht, folgende Aufgaben aufzulösen:

1. Man kennt das 1te Glied 2, und die Differenz der Glieder 3, einer arithmetischen Progression, man soll das hunderte Glied bestimmen.

Dieses Glied ist also vermög (Nro. 98) $a + d(n - 1)$ $2 + 3 \times 99 = 299$.

2. Man soll zwischen 11 und 19 drei mittlere Glieder einschalten, so daß eine arithmetische Reihe entstehet?

Es ist klar, daß die Reihe aus 5 Gliedern bestehet, und daß, da man das 1te Glied kennt, die übrigen Glieder alle bekannt wären, wenn es die Differenz wäre. Diese Differenz ist aber (Nro. 100) $\frac{19 - 11}{4} = 2$, diese mittleren Glieder sind also $11 + 2$, $11 + 4$, $11 + 6$, also die Reihe 11, 13, 15, 17, 19.

3. Zu finden, wie viele Schläge die Stundenglocke einer Uhr in 12 Stunden macht?

Man kennt also das 1te Glied $= 1$, das letzte Glied $= 12$, und die Differenz 1, nebst der Zahl der Glieder $= 12$. Es ist also vermög (Nro. 101) die Zahl der Schläge $= 6 \times 12 + 1 = 78$.

103) Zweites Gesetz der Verhältnisse.

Wenn z. B. wie $e : m = n : p$ geordnete Größen, die Eigenschaft haben, daß die Produkte der äußeren gleich den Produkten der mittleren Glieder sind, d. i. $ep = mn$ so nennt man dieß ein geometrisches Verhältniß.

104) Wäre $e : m = m : p$ d. i. $ep = m^2$, so ist dieß ein stättisches (continuirendes) geometrisches Verhältniß, und sein Gesetz, daß das Produkt der mittleren Glieder ein Quadrat ist.

105) Es ist also leicht, das unbekannte vierte Glied eines geometrischen Verhältnisses finden, denn es ist immer

$x = \frac{mn}{e}$ oder $x = \frac{m^2}{e}$. Ist das unbekannt Glied ein mittleres, so ist $x^2 = ep$, im stätigen, und $x = \frac{ep}{m}$ im fortgesetzten Verhältniß.

106) Man kann die vier Glieder einer geometrischen Proportion versetzen wie man will, wenn nur immer die Produkte der äusseren, den Produkten der mittleren Glieder gleich bleiben.

107) Man kann die vier Glieder eben so durch Multiplication, oder Division verändern wie man will, wenn nur mit jedem Gliede dasselbe vorgenommen wird, so ist z. B. obiges Verhältniß mit o multiplicirt $oe : om = on : op$, oder $\frac{e}{o} : \frac{m}{o} : \frac{n}{o} : \frac{p}{o}$, was sich immer wieder auf $e : m = n : p$ reducirt.

108) In jeder geometrischen Reihe $a : b = c : d : e : f = g : h$ rc. verhält sich die Summe aller vorhergehenden Glieder, zur Summe aller folgenden, wie ein vorhergehendes (antecedent) zu einem folgenden (consequent).

Setzt man $\frac{a}{b} = q$, so wird auch $\frac{d}{c} = q$, und $\frac{f}{e}$ q, $\frac{g}{h} = q$ u. s. w.; hieraus wird also $b = aq$, $c = dq$, $e = fg$ u. s. w., woraus man ziehet $a : aq = c : cq = e : eq$. Es ist aber 1. $a + c + e : aq + cq + eq = a : aq$. Denn $(a + c + e) \times aq = (aq + cq + eq) \times a$; 2. $a + c + e : aq + cq + eq = a + c : aq + cq$. Denn $(a + c + e) \times (aq + cq) = (aq + cq + eq) \times (a + c)$. Es ist also immer $a + c : aq + cq = a : aq$.

Es seye z. B. die geom. Reihe $2 : 4 = 3 : 6 = 5 : 10 = 6 : 12$.. rc., so wäre $2 + 3 + 5 + 6 : 4 + 6$

$+ 10\ 12 = 2 : 4$ oder $3 : 6$ u. s. w.) d. i. $16 : 32 = 2 : 4 = 3 : 6$ u. dgl.

109) Wenn man die vier Glieder eines geom. Verhältnisses, mit einem oder mehreren geom. Verhältnissen multiplicirt, so bleibt das Verhältniß unverändert. Es sollen z. B. folgende Verhältnisse mit einander multiplicirt werden.

$$\text{I.} \begin{cases} a : b = c : d \\ e : f = g : h \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} 2 : 4 = 3 : 6 \\ 5 : 15 = 7 : 21 \end{cases}$$

$$ae : bf = gc : dh \qquad 10 : 60 = 21 : 126$$

Theilt man sie durcheinander, so erhält man

$$\text{I. } \frac{a}{e} : \frac{b}{f} : \frac{c}{g} : \frac{d}{h} \qquad \text{II. } \tfrac{2}{5} : \tfrac{4}{15} : \tfrac{3}{7} : \tfrac{6}{21}.$$

Da nun $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = q$, $\frac{f}{g} = p$, $\frac{h}{g} = p$, d. i. $q = 2$, $p = 3$, $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$, und also

$$\text{I. } ae : aepg = cg : cgpq$$

$$\text{II. } 10 : 10 \times 6 = 21 : 21 \times 6.$$

Wo $ae \times cgpq = aepq \times cg$, und $10 \times 21 \times 6 = 10 \times 6 \times 21 = 1260$,

und $\frac{a}{e} : \frac{aq}{ep} = \frac{c}{g} : \frac{cq}{pg}$ und $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}$,

und $\frac{a}{e} \times \frac{cq}{pg} = \frac{aq}{eq} \times \frac{c}{g}$ und $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}$.

Also durch alle vier Fälle das Produkt der Aeussern, gleich dem Produkt der Mittleren, also das Verhältniß unverändert.

110) Wenn Größen in einem geometrischen Verhältniß stehen, so sind auch ihre Potenzen und Wurzeln in einem geometrischen Verhältniß. So ist, wenn $a : b = c : d$ gegeben wäre, $a^m : b^m = c^m\ d^m$, oder $a^{\frac{1}{r}} : b^{\frac{1}{r}} =$

$c^{\frac{1}{r}} : d^{\frac{1}{r}}$. Man soll z. B. das Verhältniß $2 : 4 = 3 : 6$ quadriren, so erhält man $4 : 16 = 9 : 36$ und $4 \times 36 = 9 \times 16 = 144 = 12^2 = \overline{2 \times 6}^2 = \overline{4 \times 3}^2$. Eben so ist $\sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$. Eben so wäre $2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3$ d. i. $8 ; 64 = 27 : 216$, und $8 \times 216 = 64 \times 27 = 148$, und endlich $8^{\frac{1}{3}} : 64^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} : 216^{\frac{1}{3}}$, d. i. wieder $2 : 4 = 3 : 16$ u. s. w.

111) Aus den Eigenschaften des geometrischen Verhältnisses geht hervor, daß man ein unbekanntes Glied bestimmen kann, das Verhältniß seye ein wachsendes (direktes) oder abnehmendes (indirektes).

112) Man nennt ein direktes Verhältniß, wenn es sich z. B. von Arbeitern und Arbeit handelt, wo die Leistung im Verhältniß der Arbeiter, bei gleichen Umständen wächst.

Ein indirektes, oder inverses (abnehmendes Verhältniß) würde aber hier in Beziehung der auf diese Arbeit, durch mehrere Arbeiter verwendete Zeit statt haben, welche mit ihrer Zahl abnimmt, da mehrere Arbeiter gleiches in weniger Zeit leisten.

Man nennt die Rechnungsart aus drei bekannten Gliedern das vierte zu bestimmen, die Regel aus dreien, (Regula de tri) und sie kann (nach Nro. 109) einfach und zusammengesetzt seyn.

Z. B. 1. 25 Arbeiter haben in einer bekannten Zeit einen 32 Klafter langen Graben gemacht, wie lange wird ein Graben werden, an welchen 50 Mann arbeiten?

Dies Verhältniß ist also ein directes, und das vierte Glied vermög $25 : 50 = 32 : (x = \frac{50 \cdot 32}{25} = 2 \times 64$ d. i. sie leisten im Verhältniß ihrer Zahl.

2. Wenn 12 Ellen Tuch 250 Gulden kosten, was werden 4 Ell. kosten?

Das Verhältniß ist also invers, und $12 : 4 = 250 : (x = \frac{250}{3} = 83,33$ Gld.

Bemerkung. Man ist (vermög Nro. 106) zu den gemachten Reductionen im B. 1 und 2 berechtigt, welche immer die Berechnung sehr erleichtern, wenn sie die Natur der Zahlen zuläßt.

113) Eine zusammengesetzte Regel de tri ist folgende, z. B. wenn 5 Mann 8 Tage arbeiten, und 12000 Ziegelsteine vermauern, wie viel werden 10 Mann in 16 Tagen verarbeiten? Es ist also (vermög Nro. 108) $8 \times 5 : 16 \times 10 = 12000 : (x = 12000 \times 4 = 48000$.

114) Wenn die Regel de tri dient, Theilungen zu machen, so heißt man sie Gesellschaftsrechnung, als z. B.

1. Zwei Personen haben Geld zur Beziehung eines gemeinschaftlichen Gewinnstes zusammen geschossen, wovon der 1te 100, der andere aber 200 Gulden eingelegt hat; Nun gewinnen sie zusammen 1200 Gulden, wie viel trifft jeden?

Es ist also klar, daß sich die einzelnen Gewinnste verhalten müssen, wie die Einlagen. Die Einlage eines jeden zum Ganzen verhält sich, nemlich die des 1ten $\div\!\div$ 300 : 100, die des 2ten $\div\!\div$ 300 : 200, also auch so die einzelnen Gewinnste, folglich

$$300 : 100 = 1200 : (x = 400)$$
$$300 : 200 = 1200 : (x = 800).$$

Einer beziehet also 400 und der andere 800 Gulden. (Dieses begründet das Gesetz Nro. 107).

Aufgaben.

1. Wie viel müssen 2000 Gulden in 29 Monaten an Zins einbringen, wenn von 100 jährlich 5 Gulden Interesse bezahlt werden?

2. Jemand präsentirt einem Wechsler ein Billet auf 3000 Gulden, welches aber erst nach 6 Monaten zahlbar wäre, es frägt sich, wie viel der Banquier zu 5 pCt. Abzug jährlich, zu bezahlen hat, da er die Interessen auf 6 Monate verliert? = Dieß nennt man Discontiren.

115) Wenn man eine geometrische Proportion durch eine Reihe von Gliedern fortsetzt, so erhält man eine Reihe, deren allgemeine Eigenschaft ist, daß, wenn a das 1te Glied und q das Verhältniß, oder den Quotus von einem Glied zum andern ausdrückt, immer $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots$ ꝛc. das Gesetz der Reihe ausdrückt.

Es seye z. B. $a = 2$, $q = 2$, so entstehet die Reihe

$$2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \ldots \text{ꝛc.}$$

116) Man siehet also, daß ein jedes Glied einer solchen Reihe gleich ist dem ersten, multiplicirt mit dem Gesetz q, zu einer Potenz erhoben, deren Exponent der Zahl der vorhergehenden Glieder gleich ist. So ist z. B. das vierte Glied aq^3, und $16 = 2 \times 2^3 = 2 \times 8$.

117) Daß also das Gesetz immer gefunden werden kann, wenn man das 1te Glied und die Zahl der vorhergehenden Glieder kennt, so wäre das 5te Glied aq^5, also ein Glied n, $= aq^{n-1}$, und $64 = 2 \times 32$, also $\sqrt[5]{32} = 2 = q$.

118) Ferner daß sich immer zwei Glieder einer geom. Reihe zu einander verhalten, wie das 1te und 2te zu einer Potenz erhoben, welche der Zahl der sich zwischen ihnen befindenden Glieder gleich ist.

So ist z. B. das 1te Glied zum Quadrat des 2ten, d. i. $a : aq^2 = a^2 : a^2q^2$, oder $2 : 8 = 4 : 16$. Eben so wäre das 1te Glied zum 4ten, wie der Cubus des 1ten Gliedes zum Cubus des 2ten, d. i. $a : aq^3 = a^3 : a^3q^3$, d. i. $2 : 16 = 8 : 64$.

119) Endlich, daß, um die Summe aller Glieder zu finden, man das letzte Glied mit dem Gesetz q multipliciren, das 1te Glied hievon abziehen, und diese Differenz mit q — 1 theilen muß. Wirklich ist, wenn s die Summe aller Glieder der Progression $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots aq^{n-1}$, in welcher man a, q und aq^{n-1} kennt, ausdrückt, $s - aq^{n-1}$ die Summe aller vorhergehenden, und S — a jene aller folgenden Glieder. Es ist (vermög Nro. 108) $s - aq^{n-1} : s - a = a : aq$. Also $saq - a^2q^n = sa - a^2$, also $sq - s = aq^n - a$, also $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$.

120) Aus diesen entwickelten allgemeinen Gesetzen können folgende Aufgaben aufgelöst werden:

1. Ein junger Mensch, welcher 6 Klafter weit von einer Allee, in einer Gesellschaft saß, machte folgende Wette: Hier unter diese 3 Klafter von einander entfernten 100 Bäume dieser Allee, sprach er, lege ich diese 100 Ducaten so, daß ich jeden Ducaten von dieser Stelle einzeln abhole, und in zwei Stunden fertig bin. Konnte er dieser Bedingung entsprechen? — Für diesen Fall wäre also die Summe einer geom. Progression von 100 Gliedern zu bestimmen, deren 1tes Glied $a = 6 + 6 = 12$, $q = 3 + 3 = 6$ (weil er immer hin und zurück muß) gegeben ist. Er hätte also einen Weg von $(12 + 606)\ 50 = 30900$ Klafter in zwei Stunden durchlaufen müssen.

2. Man soll zwischen 2 und 64 vier Glieder so einschalten, daß sie eine geom. Reihe bilden?

3. Einer will sein Pferd so verkaufen, daß man ihm für den 1ten der Nägel, welche es in seinen Hufen hat, einen Heller, für den 2ten zwei, für den 3ten vier u. s. w. bezahlen soll. Wie hoch hält er sein Pferd?

121) Von den Gleichungen.

Wenn man eine Combination von unbekannten und bekannten Größen, einer von ihnen unabhängigen bekannten Größe gleich setzt, oder gleich setzen muß, um diese unbekannte zu entwickeln, so entsteht eine Gleichung. So ist z. B. $8 + x = 12$, oder $7x + 5y = 36$, oder $x^7 - 3x = 1$ u. s. w.

122) Die Gleichungen dienen aber vorzüglich zur Bestimmung unbekannter Größen.

123) Die Auflösung einer jeden Gleichung ist möglich, wenn nicht aus der Entwickelung des Unbekannten ein arithmetisches Gesetz hervor gehet, welches eine Unmöglichkeit bedingt. So ist $x + 20 = 18$ unmöglich zu bestimmen, weil keine Subtraction in x bedingt ist, und $20 = 18 - x$ erfolgen müßte.

124) Man benennt die Gleichungen nach den Exponenten der unbekannten Größen, so ist z. B. $ax + b = c$, $bx + ay = d$, x und y in der 1ten Potenz, die Gleichungen also vom 1ten Grade.

In $x^2 + 2ax + a^2 = c$, und $xy = ax = m$ sind Potenzen des 2ten Grades, und Produkte des Unbekannten bedingt, also die Gleichungen vom 2ten Grade, u. s. w.

125) Um eine Gleichung aufzulösen, muß man die unbekannte Größe aus den bekannten so entwickeln, daß sie ihnen isolirt gleich gesetzt werden kann.

126) Gleichungen vom 1ten Grad.

Es seye $x - 7 = 12$, so ist $x = 12 + 7 = 19$. $x + 3 = 10$, so ist $x = 10 - 3 = 7$, und allgemein $x \pm a = b$ $x = b \mp a$. Man nennt dieß eine Gleichung durch Transposition auflösen.

Eben so wird $cx - b = a + mx$, $cx - mx = a + b$, und $dx + b = a - fx$ $dx + fx = a - b$.

127) Es seye $4x = 32$, so ist $x = \frac{32}{4} = 8$, und allgemein $ax = b$ ist $x = \frac{b}{a}$. D. i. man muß die gleichbesetzte Größe mit eben den bekannten, und in eben den bekannten, und in dem Gesetz dividiren, mit welchen die Unbekannte multiplicirt war.

128) Der Gegensatz würde statt finden, wenn z. B. $\frac{x}{9} = 6$ wäre, wo also $x = 6 \times 9 = 54$ wäre, und allgemein, wenn $\frac{x}{a} = b$ wird $x = ab$.

Eben so würde $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = p$, wenn man die Brüche unter gleiche Nenner bringt $\frac{nx + mx}{mn} = p$; also $nx + mx = mnp$, und $x = \frac{mnq}{n + m}$. Es muß also hier im Gegensatz, die bekannte gleich gesetzte Größe, mit eben den Größen, und nach eben den Gesetzen getheilt werden, mit welchen die unbekannte Größe multiplicirt war. Wäre $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} - b = \frac{a}{c} = f$ gegeben, so setze man $\frac{a}{c} + f + b = m$, da sie alle bekannt sind, und man erhält $3x + 5x = 5 \times 3 \times m$, und $x = \frac{15m}{8}$.

Aufgaben.

1. Welche ist die Zahl deiner Schüler? fragte man den Pythagoras.

Die Hälfte antwortete er, studirt Mathematik, ein Viertheil Musik, und ein Siebentheil übt sich im Stillschweigen, über diese sind noch drei Weiber in meiner Schule.

Man siehet leicht, daß hier eine Zahl gesucht werden muß, deren Hälfte, Viertheil und Siebentheil, mehr 3 dieser Zahl selbst gleich ist. Ist nun x diese Zahl, so muß $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3$ seyn, also die Brüche unter einen Nenner gebracht und diesen wegschafft (nach Nro. 126) wird $56x = 50x + 168$ transponirt und reducirt $6x = 168$, also $x = \frac{168}{6} = 28$.

Er hatte also 28 Schüler.

2. Diophante von Alexandrien durchlebte den 6. Theil seines Alters in seiner Kindheit, den 12. Theil in seiner Jugend, und verheirathete sich, nachdem er den 7. Theil mehr 5 Jahre seines Alters durchlebt hatte, wo er einen Sohn erzeugte, welcher nur halb so alt wurde als sein Vater, der 4 Jahre darauf starb.

Wenn x Diophants Alter ausdrückt, so muß man nach den sich folgenden Bedingnissen $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$ seyn. Man erhält also $84x = 75x + 756$; also $84x - 75x = 756$ und $9x = 756$, und $x = \frac{756}{9}$ 48. = 84

3. Man kennt die Geschwindigkeit, mit welcher sich zwei Körper auf derselben Bahn bewegen: man soll hieraus den Ort ihres Zusammentreffens bestimmen?

Nennt man die beiden bewegten Körper M und C, und nehmen wir die Geschwindigkeit des Körpers M so an, daß er in der Zeit t den Raum s durchläuft, und jene

des Körpers C so, daß er in der Zeit g den Raum f durchläuft. Bezeichnet man ferner den Raum der zwischen ihnen am Anfang der Bewegung ist, mit d, und die Zeit mit h, so ist, wenn M nach C folgt, M weiter von dem Orte des Zusammentreffens entfernt, als C, welche unbekannte Distanz gleich x gesetzt, jene für C, x — d seyn wird.

Da sich nun bei gleichförmiger Bewegung die Zeiten verhalten, wie die durchloffenen Raume, so ist $s : x = t : \frac{tx}{s}$, also $\frac{tx}{c}$ die Zeit, welche der Körper M braucht, um den Raum x zu durchlaufen.

Nun ist aber auch $f : x - d = g : \frac{gx - gd}{f}$ also die Zeit, welche C verwendet, um den Raum x — d zu durchlaufen, ist $\frac{gx - gd}{f}$. Damit nun diese beiden Zeiten einander gleich werden, muß man h zu dem kleinern addiren, es wird also, wenn C voraus ist $\frac{tx}{s} + h = \frac{gx - gd}{f}$, also $x = \frac{sgd + shf}{sg - ft}$. Für den Fall, wo M voraus ist, ist $\frac{tx}{s} = \frac{gx - gd}{f} + h$, woraus man ziehet $x = \frac{sgd - shf}{sg - ft}$.

Um eine Anwendung zu machen, setzen wir, es seye ein Courier des Morgens 8 Uhr von Paris abgereist, um, indem er fünf französische Meilen in 2 Stunden macht, einen andern Courier einzuholen, der Morgens 5 Uhr von Nogent an der Seine abgereist ist, und die Strasse nach Chatillion an der Seine verfolgt, indem er 7 franz. Meilen in 6 Stunden zurücklegt. Es sind 24 franz. Meilen von Paris nach Nogent. Es frägt sich nun, ob der

Pariser Courier den andern einholt, vor er in Chatillion ankömmt?

Antwort ja! Denn wenn man in der Formel $x = \frac{sgd + shf}{sg - ft}$, die beziehenden Werthe für s, t, g, d, f, h, d. i. $s = 5$ Ml. $t = 2$ St., $d = 24$ Ml. $h = 3$ St. $f = 7$ Ml. und $g =$ St. substituirt, so findet man, daß ihn der Pariser Courier $51\frac{9}{10}$ Ml. von Paris einholen wird, da nun 54 Ml. nach Chatillion sind, so wird er ihn in einer Distanz von $2\frac{7}{10}$ vor Chatillion einholen.

Für den 2ten Fall der Formel, wo $x = \frac{sgd - shf}{sg - ft}$, würde man finden, daß der Pariser Courier den andern einholen würde, wenn er $13\frac{43}{44}$ Ml. zurückgelegt hat.

4. Jemand vertheilt eine Anzahl Thaler unter drei Personen. Der ersten giebt er die Hälfte derselben, mehr einen halben, der zweiten die Hälfte von dem, was ihm übrig bleibt, und einen halben, der dritten giebt er abermals die Hälfte von dem, was ihm übrig bleibt, und wieder einen halben; er selbst aber hatte alle hingegeben. Wie viel Thaler empfieng jede Person?

5. Der Kopf eines Fisches habe 9 Zoll, der Schweif seye so lange als der Kopf und die Hälfte des Körpers, und dieser seye eben so lange, als der Kopf und der Schweif zusammen, wie lange ist der Körper, der Schweif und der ganze Fisch?

6. Es sollen zwei Sorten irgend einer Waare, deren Werthe m und n sind, zur Quantität q so vermischt werden, daß der Werthe nur mehr p ist. Wie viel muß von der Sorte, deren Preis m ist, genommen werden?

Wie erhält man $x = \frac{q(p - n)}{m - n}$?

129) Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Es ist öfters nöthig, mehrere unbekannte Größen anzuwenden, um die Bedingnisse einer Aufgabe auszudrücken, woraus dann so viele Gleichungen entstehen, als unbekannte Größen vorkommen. Um nun eine solche Aufgabe aufzulösen, muß man alle Unbekannten bis auf eine wegschaffen, und diese so entwickeln, daß sie lauter bekannten gleich gesetzt ist. Z. B.

Aufgabe.

Eine französische und eine englische Fregatte haben während drei Stunden 429 Kanonenschüsse mit einander gewechselt. Die französische Fregatte hat 89 Schüsse mehr gemacht als die englische; wie viel hat jede Schüsse gemacht?

Es ist klar, daß hier bedingt ist, die Größen x und y zu finden, deren Summe 429, und deren Differenz 89 ist. Man hat also

$$x + y = 429$$
$$x - y = 89$$

Will man nun in jeder dieser Gleichungen x bestimmen, so erhält man $x = 429 - y$, und $x = 89 + y$. Da nun $429 - y = 89 + y$, so wird $2y = 429 - 89 = 340$, also $y = \frac{340}{2} = 170$.

Die englische Fregatte hat also 179 Schüsse gemacht; also die französische $170 + 89 = 259$, und $259 + 170 = 429$.

Wir haben hier gefunden, daß die kleinere Zahl der halben Summe weniger der halben Differenz der beiden Zahlen gleich ist, und die größere $x = 89 + 170$ der halben Summe mehr der halben Differenz. Dies läßt sich als allgemeines Gesetz beweisen.

Es seye $x + y = s$

$$\begin{array}{r} x - y = d \\ \hline 2x = s + d \end{array}$$ so ist addirt,

und $x = \frac{s + d}{2}$. Und subtrahirt $2y = s - d$, also $y = \frac{s - d}{2}$.

Aufgabe.

Das Alter Newtons und jenes des Descartes zusammen beträgt 139 Jahre, und Newton seye 31 Jahre nach Descartes gestorben, wie alt waren beide?

Es ist also in obigen Formeln $s = 139$, und $d = 31$, also $x = \frac{139 + 31}{2} = \frac{170}{2} = 85$, u. $y = \frac{139 - 31}{2} = \frac{108}{2} = 54$.

130) Zwei Quellen, welche gleichförmig laufen, haben beide zusammen ein Reserve von 195 Eimern angefüllt, die erstere, indem sie zwei Tage lief, und die zweite, indem sie drei Tage lief. Diese Quellen haben eben so eine andere Reserve von 330 Eimern angefüllt, indem die erstere fünf Tage, und die andere vier Tage lief. Wie viel Wasser floß täglich aus jeder dieser Quellen?

Es seye x das zugeflossene Wasser der 1ten Quelle, y jenes der zweiten, so ist

$$2x + 2y = 195$$
$$5x + 4y = 330.$$

Hieraus findet man $x = \frac{195 - 3y}{2}$, und $x = \frac{330 - 4y}{5}$, also $\frac{195 - 3y}{5} = \frac{330 - 4y}{5}$, folglich $y = 45$, es ist also $x = \frac{195 - 3 \times 45}{2} = 80$.

131) Man soll eine Zahl bestimmen, welche so aus zwei Zahlzeichen bestehet, daß man dieselben einzeln zusammen addirt, sie das Vierfache dieser Summe beträgt; wenn man aber zu dieser Zahl 18 addirt, sie so viel beträgt, als wenn man ihre Ziffer versetzte, d. i. die Stellen verwechselte. Welche ist diese Zahl?

Es seyen x und y diese beiden Zahlen, so ist klar, daß die Summe ihrer Ziffer $= x + y$, und daß, wenn x jene der Zehner ausdrückt, $10x + y = 4x + 4y$ seyn wird. Nun ist aber auch bedingt, daß $10x + y + 18 = 10y + x$ seyn muß; man erhält also aus der 1ten $y = 2x$ und aus der 2ten $y = x + 2$; also $2x = x + 2$ und $x = 2$, in der Reihe der Zehner; also $x = 20$. Also aus der 1ten Gleichung $20 - 8 = 3y$, also $12 = 3y$ und $y = \frac{12}{3} = 4$.

Die gesuchte Zahl ist also 24, und $24 + 18 = 42$ nach der 2ten Bedingung.

132) Eine aus Silber und Gold vermischte Masse wiegt 30 Unzen, und ihr Cubicinhalt ist 3 Zolle. Ueberdieß weiß man, daß das Gewicht eines Cubiczolles Gold, $12\frac{2}{3}$ Unzen, und jenes eines Cubiczolles Silber nur $6\frac{8}{9}$ Unzen wiegt, wie viel war in dieser Massa Gold und Silber enthalten?

Wenn man x das Maas der Masse, welche an Gold in diesen 3 Cubiczollen enthalten ist, und y jene, welche an Silber darin enthalten ist, nennt, so ist $x + y = 3$ das Cubicmaas, und $x \times 12\frac{2}{3} + y \times 6\frac{8}{9} =$ das Gewicht.

Nimmt man den Werth von x in beiden Gleichungen, um eine Gleichung in y zu haben, so erhält man $3 - y = \frac{270 - 62y}{114}$, also $342 - 114y = 270 - 62y$, und

$52y = 72$, und $y = (\frac{72}{52} = \frac{18}{13})$ folglich $x = 3 - \frac{13}{13}$ $= \frac{21}{13}$, und $x + y = \frac{18}{13} + \frac{21}{13} = \frac{39}{12} = 3$.

133) Man soll 100 so in zwei Theile theilen, daß, wenn man den 1ten mit 5 theilt, 2 übrig bleiben, theilt man aber den 2ten mit 7, 4 übrig bleibt.

Man hat also $5x + 2$, und $7y + 4$ für die beiden Theile, es ist also $5x + 2 + 7y + 4 = 100$, woraus man ziehet $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y + 2y$, oder $x = 18 - y + \frac{2y + 4}{5}$.

Es muß also $2y - 4$ durch 5 theilbar seyn, also auch dessen Hälfte.

Setzt man nun $y - 2 = 5z$, so ist $y = 5z + 2$, also $x = 16 - 7y$. Woran erhellet, daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$, also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen. I. $z = 0$ gibt $x = 16$, $y = 2$, woraus die beiden gesuchten Theile von $100 = 82 + 18$ seyn werden. II. $z = 1$ gibt $x = 9$, und $y = 7$, woraus $100 = 53 + 47$ folgt, und III. $z = 2$, woraus $x = 2$ und $y = 12$, also $100 = 12 + 88$ folgt.

Aufgabe.

1. In den Zeiten, wo noch die Thiere sprachen, gieng ein Maulthier und ein Esel beladen neben einander. Der Esel klagte über seine Last, da sprach das Maulthier, was klagest du, wenn du mir einen deiner Säcke auflegtest, so hätte ich noch einmal so viel als du, und wenn ich dir einen gäbe, so hätten wir gleich viele. Wie viel trug jeder Säcke?

134) Gleichungen vom 2ten Grade.

Wir haben bisher gesehen, daß eine jede Gleichung, welche keine arithmetische Unmöglichkeit bedingt, aufgelöst werden kann. Eben so verhält es sich auch mit den Gleichungen vom 2ten Grade.

135) Alle mögliche Fälle der Gleichungen vom 2ten Grade, welche Potenzen oder Produkte von Binomien sind, lassen sich auf folgende reduciren:

I. 1 $(x - a)\ (x - a) = (x^2 - ax) - (ax - a^2)$ $= 0$ reine quad. Gleichung.

2 $(x - a)\ (x - b) = (x^2 - ax) - (bx - ab)$ $= 0$ bin. Produkt.

II. 1 $(x + a)\ (x - a) = (x^2 + ax) - (ax + a^2)$ $= (x^2 - a^2) = 0.$

2 $(x + a)\ (x - b) = (x^2 + ax) - (bx + ab)$ $= (x^2 + (a - b)\ x - ab) = 0.$

III. 1 $(x - a)\ (x + a) = (x^2 - ax) + (ax - a^2)$ $= (x^2 - a^2) = 0.$

2 $(x - a)\ (x + b) = (x^2 - ax) + (bx - ab)$ $= (x^2 - (a + b)\ x - ab) = 0.$

Setzt man in I. 2a und $a + b = s$, und a^2 und $ab = p$, und in II. und III. $a \mp b = d$ und eben so a^2 und $ab = p$, so erhält man

$$\text{I. } x^2 - sx - p = 0. \quad \text{II. } x^2 + dx - p = 0.$$
$$\text{III. } x^2 - dx - p = 0.$$

136) Da nun das Gesetz darauf beruht, eine allgemeine Auflösung dieser Formeln für diese Fälle zu finden, so wollen wir damit anfangen, in der Gleichung I die Werthe von s und p, welche die Summe und das Produkt zweier Zahlen ausdrücken, zu bestimmen.

Es seye x die größere, und y die kleinere der beiden Zahlen, so ist $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, und $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$

(Nro. 128) deren Produkt also $xy = \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}d^2$, folglich da $xy = p$, $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$. Also die Formel für alle Gleichungen in I zur Bestimmung von x

$$x = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$

Da nun die Formeln II. und III. die Differenz zweier Zahlen und ihr Produkt geben, so findet sich für diese Fälle, da $\frac{1}{4}d^2 + p = \frac{1}{4}s^2$

$$x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{1}{4}d^2 \pm p}$$

Die allgemeine Theorie gibt unrichtig nur eine Formel für beide Fälle.

137) Sind in einer, im Gesetz der Gleichungen des 2ten Grades entwickelten Aufgabe, mehrere Glieder gegeben, als z. B. $\frac{c^2x^2}{m} + fgx + cln = lpx - n^3$, so bringe man m weg, wodurch man erhält $c^2x^2 + mfgx + clmn = mlpx - mn^3$. Theilt man nun mit c^2, so erhält man, nach geordneten Gliedern $x^2 + \frac{fmg + lpm}{c^2} x + \frac{mcln + mn^3}{c^2} = o$, also $x^2 + sx - p = o$, weil immer $mn^3 > mcln$ seyn muß, wenn die Gleichung $= 0$ werden soll.

Anwendung. Es seye die Gleichung $x^2 - 3x = 10$ gegeben, so siehet man ohne weiters, daß sie der Formel $x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{1}{4}d^1 \pm p}$ angehört, und wir erhalten $x = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}52}$, also $x = 1{,}5 \pm 3{,}5$, $x = 5$, $x = 2$. Die Factoren sind also $(x - 5)\ (x + 2)$. Wie das Gesetz der Gleichung sie bedingt. — Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe für x, so erhält man $5^2 - 3.5 - 10$, und als unmittelbare Folge davon, daß man x^2 statt xy gesetzt hat, auf $2^2 + 6 = 10$.

138) In einem solchen Produkte sind immer die zwei Theile der Gleichung = 0, nemlich hier

$$\overline{5 \times 2 - 5 \times 2}$$
$$\overline{+ 2 \times 5 - 10}$$
$$\overline{5 \times 2 \pm 10 - 10 = 0}$$

2. Ich gebe dir alle Goldstücke, welche in diesem Beutel sind, sagte ein Vater zu seinem Sohne, wenn du ihre Zahl errathen kannst. Indeß wisse, daß ihr Fünffaches die Hälfte ihres Quadrats um 12 übersteigt.

Es ist also $5x - \frac{x^2}{2} = 12$, und $10x - x^2 = 24$.

Die Gleichung gehört also der Formel $x = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$ also $x = 5 + \sqrt{25 - 24}$ und $x = 6$, $x = 4$, und $(x - 6)(x - 4)$ die Factoren. Auch ist hier $60 - 36 = 24$ und $40 - 16 = 24$.

Der Sohn konnte also das Geld nicht verdienen, denn es konnten eben sowohl 6 als 4 Goldstücke im Beutel seyn.

3. Es seye $x^2 - 6x + 10 = 0$, so ist vermög $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + p}$ $x = 3 \pm \sqrt{9 + 10} = 3 \pm \sqrt{19} = 3 \pm 4{,}3589$, als 0 $x = 7{,}3589$ und $x = 1{,}3589$.

Ist $x = 7{,}3589$, so erhält man $x^2 = 54{,}142$, und $6x = 44{,}152$, und $54{,}142 - 44{,}152 = 10$.

Eben so ist $x = 1{,}3534$ gesetzt, $\cdot 1{,}8456 + 8{,}1534 = 10$.

Die Factoren dieser Gleichung sind also $(x - 7{,}3589)$ $(x + 1{,}3589)$.

4. Ein Offizier will seine Truppe in ein Quarré stellen. Nachdem er sie geordnet hat, bleiben ihm 45 übrig.

Nun stellt er einen Mann mehr in jede Reihe, und da fehlen ihm 46 Mann. Wie viel hatte er Soldaten?

Man hat also $x^2 + 45 = (x + 1)^2 - 46$. Also $x^2 - (x^2 + 2x + 1) = 46 + 45$, also reducirt $2x = 46 + 45 - 1$, also $2x = 90$ und $x = 45$. Für den 1ten Fall war also $45^2 + 45 = 2070$, und für den 2ten Fall $46^2 - 46 = 2070$ Mann, welche der Offizier befehligte.

5. Es seye $x^2 - \overline{10x + 30} = 0$ gegeben, so ist vermög der Formel $x = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{\frac{1}{4} d^2 + p}$, $x = 5 \pm \sqrt{25 + 30} = 5 \pm \sqrt{55} = 5 \pm 7{,}41619$, also $x = 12{,}41619$, und $x = 2{,}41619$, also die Factoren $(x - 12{,}31619)\ (x + 2{,}41619)$.

Es fällt ein Stein in einen Brunnen, in welchen kein Wasser ist. Man weiß, wie viele Secunden er gebraucht hat, bis man ihn auf den Grund fallen hörte; ferner weiß man, daß die durchloffenen Raume des Steines sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Zeiten, welche diese Räume bedingten, und endlich 3tens, daß die Bewegung des Schalles gleichförmig ist. Wie tief war der Brunnen, wenn man den Fall des Steines nach 10 Secunden gehört hat? Man weiß aus Versuchen, daß ein in vertikaler Richtung fallender Körper, in der 1ten Secunde einen Raum von 15,098 Pariser Fuß durchläuft. Ferner weiß man, daß der Schall in jeder Secunde einen Weg von 1038 Par. Fuß zurücklegt; man hat also folgendes Verhältniß $15{,}098 : x = (1\ \text{Sec.})^2 : \frac{(1\ \text{Sec.})^2 \times x}{15{,}098} = \frac{x}{15{,}098}$. Es ist also $\sqrt{\frac{x}{15{,}098}}$ die Zeit, welche es gebraucht hat, um von dem Grund des Bodens herauf hörbar zu werden, vermög

$$1038 : x = 1'' : \left(\frac{1 \times x}{1038}\right)$$

Es ist also die Zeit, welche durch Schall und Fall vorüber gehet = 10″, also

$$\frac{x}{1038} + \sqrt{\frac{x}{9815,0}} = 10'' \text{ also}$$

$x + 1038 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{15,098}} = 10380.$ Setzt man $\sqrt{x} = y$ so erhält man $y^2 + \frac{1038}{3,8845} y = 10380$ und $y^2 + 267y = 10380$, und da hier $y = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + p}$, so ist $y = 133,5 \pm \sqrt{17822 + 10380}$, und $y = 133,5 \pm 167,9 = 34,4$. Also da $y = \sqrt{x}$, $x = 1182$ Par. Fuß.

Bemerkung. Da $\frac{x}{1038} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{15,089}} = 10''$ seyn muß, so darf man, um sich von der Wahrheit des Werthes von x zu überzeugen, nur den gefundenen Werth von x substituiren, und man erhält $\frac{1182}{1038}$

$$+ \frac{34.4}{3,8845} = 1,14 + 8,86 = 10''.$$

139) Da die Gesetze, aus welchen Gleichungen vom 2ten Grade entstehen können, aus dem Reich der Phantasie hervor gehen; also unbegränzt sind, so gibt es auch Gleichungen vom 2ten Grade, welche weder Binomial-Potenzen noch solche Produkte sind, wie z. B. $x\left(x \pm m \pm \frac{p}{x}\right) = x^2 \pm mx \pm p = o.$

Anwendung. Es seye z. B. $x^2 + 2000x = 17$, so findet man durch Versuche, in $\frac{17,}{2000}$ $x = 0,0084995$ beinahe.

Eben so würde $x^2 + 2000x = 0{,}003499$ gefunden werden, u. s. w.

Aufgaben.

1. Jemand hat ein Pferd um einen Preis gekauft, den er nicht bekannt machen will, jedoch äußert er, er habe es um 119 Thaler verkauft, und daran vom 100 so viele Thaler gewonnen, als das Pferd gekostet hat. Was hat dieses Pferd gekostet?

2. Zwei haben in Gesellschaft 100 Thaler zur Verzinsung eingelegt. Der erste läßt sein Geld 3 Monate, der zweite aber 2 Monate lang liegen, und jeder ziehet mit Capital und Zinsen 99 Thaler, wie viel hat jeder eingelegt?

140) Höhere Gleichungen.

Man nennt alle jene Gleichungen, welche Unbekannte mit höheren Exponenten als 2 haben, höhere Gleichungen. Jene vom 3ten Grade sind also der 1ten Art, und sie entwickeln, wenn sie Binomial-Produkte sind, folgende Gesetze:

I.

1 $(x - a)(x - a)(x - a) = (x^3 - 3ax^2) - (2a^2x - a^3) = 0.$

2 $(x - a)(x - a)(x - b) = [(x^2 - (2a + b) x^2)] - [(a^2 + 2ab) x - a^2b] = 0.$

3 $(x - a)(x - b)(x - c) = [(x^2 - (a + b + c x^2] = [(ab + bc + ac) x - abc) = 0.$

II.

1 $(x + a)(x + a)(x - a) = [x^3 + ax^2] - [a^2x + a^3] = 0.$

2 $(x + a)(x + a)(x - b) = [x^3 + (2a - b) x^2] - [(a - 2ab) x + a^2b] = 0.$

3 $(x + a)(x + b)(x - c) = [x^3 + (a + b - c) x^2] - [(ab + bc - ac) x - abc] = 0.$

$$\text{III.}\begin{cases} 1\ (x - a)(x - a)(x + a) = [x^3 - ax^2] + [a^2x - a^3] = 0. \\ 2\ (x - a)(x - a)(x + b) = [x^3 - (2a - b)\, x^2] + [(a^2 - 2ab)\, x - a^2b] = 0. \\ 3\ (x - a)(x - b)(x + c) = [x^3 - [(a + b) - c)\, x^2] + [ab - (ac + bc)\, x - abc] = 0. \end{cases}$$

Setzt man I. die Coefficienten von x^2 und x, gleich m und n, und selbe in II. und III. gleich r und u, und alle Produkte a^3, a^2b, $abc = p$, so erhält man folgende 3 Formeln:

$$\text{I. } (x^3 - mx^2) - (nx - p) = 0.$$
$$\text{II. } (x^3 + rx^2) - (ux + p) = 0.$$
$$\text{III. } (x^3 - rx^2) + (ux - p) = 0.$$

Bemerkung. Man siehet hier ohne weiters, daß unter allen obigen 9 Produkten nur das erste in I. eine reine cubische Gleichung ist. Diese Fälle sind aber nicht alle, da selbe nur für Binomial-Produkte anwendbar sind, so ist z. B. $x^3 - a^2 = 0$ als Binomial-Produkte betrachtet, die reducirte Gleichung in I. Sie kann aber auch Produkt von x $(x + a + \frac{a^2}{x})(x - a)$ seyn u. s. w.

Ueberdies kann auch eine solche Gleichung wie $x^3 = a^3$, oder $\frac{2}{3}x^3 = 1152$, also $x^3 = \frac{3 \times 1152}{2} = 1728$ schlechthin Produkt $x.x.x = a.a.a$ seyn u. s. w.

Ueberhaupt sind auch diese Gleichungen vom 3. Grade Resultate der unendlich verschiedenen Bedingnisse, welche aus den Bedürfnissen, oder aus dem Reich der Phantasie abgeleitet sind, und diese lassen sich nie in bestimmte Formen zwängen.

141) Eine wesentliche Bedingung zur Auflösung einer Gleichung ist, daß man die wahre Beziehung der Glieder

auf einander ausdrückt, es seye z. B. $x^3 - \overline{8x^2 - 17x - 10} = 0$, so bedingt die Gleichung einen Werth für x, so, daß, wenn man von $8x^2$, $\overline{17x - 10}$ abziehet, ein Rest (r) übrig bleibt, so daß $x^3 - r$, mit demselben Werth durch die ganze Gleichung Null wird. Für diesen Fall findet sich leicht 1 als ein solcher Factor von 10, wo man erhält $1 - 8 - \overline{17 - 10} = 1 - \overline{8 - 7} = 1 - 1 = 0$. Theilt man nun diese Gleichung mit $x - 1$, so erhält man $x^2 \pm \overline{7x - 10} =$ und vermög der Formel $x = \frac{1}{2} s \pm \sqrt{\frac{1}{4} s - p}$, also $x = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10}$, also $x = 3{,}5 \pm 1{,}5$, und x 5, $x = 2$. Die Factoren der Gleichung sind also (x 5) $(x - 2)$ $(x - 1)$.

142) Es seye gegeben $\overline{x^3 - 3x^2} - \overline{8x + 10} = 0$, so ist von den drei Factoren keiner passend als 5, und man erhält $\overline{125 - 75} - \overline{40 + 10} = 0$, und ihre Factoren sind $x(x + 2 + \frac{2}{x})\ (x - 5) = 0$. Die Gleichung ist also kein Binomial-Produkt, weil sie der Verbindung ihrer Glieder zur Folge, zu keinem der möglichen neun Produkte des Nro. 135 gehört.

Eben so drückt die Gleichung $x^3 - \overline{3x^2 + 46x + 72} = 0$ kein Binomial-Produkt aus, und man siehet unmittelbar, daß hier nur der höchste Factor in 72, d. i. die Zahl 9 passen kann, wo man erhält $729 - \overline{243 + 414 + 72} + 729 - 729 = 0$. Diese Gleichung ist also ebenfalls kein Binomial-Produkt.

143) Die Factoren der Gleichung $x^3 - \overline{2x - 5}$, sind; nemlich der erste $(x - 2{,}094)$. Theilt man diese

Gleichung mit diesem Factor, so erhält man $(x^2 + 2{,}094x + 2{,}385)$ als zweiter Factor, welcher eine Summe ist.

144) Die Gleichung $x^3 - 5x - 3 = 0$. Hier ist $x = 0{,}656$, mit diesem Factor getheilt gibt $x^2 \pm 0{,}956x - 4{,}57 = 0$ und

$$x = 0{,}328 \pm \sqrt{0{,}107 + 4{,}57}$$
$$x = 0{,}320 \pm \sqrt{4{,}677}$$
$$x = 0{,}328 \pm 2{,}162 \text{ folglich } x = 2{,}49 \text{ und}$$

$x = 1{,}834$. *)

Die Gleichung $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ ist reducirt $x^3 - 1{,}5x^2 + 2x - 2{,}5 = 0$, und $x - 1$ ein Factor. Theilt man diese Gleichung mit $x - 1$, so erhält man $x^2 \pm 0{,}5 - 2{,}5 = 0$ und

$$x = 0{,}25 \pm \sqrt{2{,}5025}$$
$$x = 0{,}25 \pm 1{,}6 \text{ also } x = 1{,}85 \text{ und } x = 1{,}33. \text{*)}$$

145) Aufgabe. Die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 5x - 7 = 0$ ist gegeben, man soll eine Gleichung finden, in welcher die drei Werthe von x um 1 größer sind, als in der gegebenen.

Auflösung. Die Factoren der gegebenen Gleichung sind $(x - 0{,}775)\ (x - 6{,}592)\ (x + 1{,}372)$, vermehrt man jeden Factor um Eins, so erhält man $(x - 1{,}775)\ (x - 7{,}592)\ (x + 2{,}372) = x^3 - 6{,}90x^2 + 8{,}76x - 30 = 0$. Dieß ist also die gesuchte Gleichung. *)

Anmerkung. Man könnte eben so leicht einen Factor um Eins vermehren, oder auch zwei, um die

---

*) S. Eitelwein's Grundlehren der höheren Analys. Berlin 1824. 4to. Cap. IV., worin die mit * bezeichneten Stellen behandelt werden.

Gleichung herstellen, nur muß dies immer im Gesetz der gegebenen Gleichung geschehen, d. i., es muß nicht eine Gleichung entstehen, welche mit der gegebenen nichts gemein hat.

146) Wie man Brüche aus einer Gleichung wegschafft, haben wir oben schon gezeigt (Nro. 136), wäre also die Gleichung $\frac{4x^3}{7} - \frac{2}{5}x^2 + 17\frac{4}{9}x - 20 = 0$ gegeben, so würde man $x^3 - \frac{14}{20}x^2 + \frac{30,19}{45}x - 35$ und endlich $x^3 - 0,7x^2 + 30,422x - 35 = 0$ erhalten, man sieht also unmittelbar, daß die Gleichung irrationale Factoren hat. Man kann also dieselben nur mittels Annäherung nach bedingter Genauheit finden, und zwar, da hier allgemeine Gesetze, (da nur von bestimmten Zahlen die Rede ist) nicht anwendbar sind, durch Versuche.

Man findet, indem man mit $x = 1$, und $x = 1,5$ anfängt, daß ein Factor zwischen diese beiden Werthe fällt, und nach einigen Versuchen, daß $x = 1,1735 \ldots$ mit relativer Genauheit gesetzt werden darf. Man erhält also $x^3 = 1,616$, $x^2 = 1,377$, $x = 1,1735$, und somit $1,616 - 0,9219 + 33,7, - 53 = 1,616 = 0,9259 + 0,7 = 0$ auf 0,005 genau.

Theilt man diese Gleichung mit $x - 1,1735$, so erhält man

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 0,7x^2 + 30,422x - 35 & x - 1,1745 \\ \underline{x^3 - 1,1735x^2} & \overline{x^2 + 0,4735x - 29,867} \\ \quad 0,4735x^2 + 30,422x & \\ \quad \underline{0,4735x^2 - 0,555x} & \\ \quad\quad 29,867x - 35. & \end{array}$$

Löst man die Gleichung $x^2 + 0,4705x - 29,867 = 0$ auf, so erhält man $x = 4,7067 \ldots$ und $x = 5,2533 \ldots$ Die Factoren der Gleichung sind also $(x + 5,7067)$ $(x -$

5,2333) $(x - 1{,}1735)$ denn sie gehört dem Gesetz (3 in Nro. 134), nur die Beziehung der Glieder auf einander, welche der arithmetische Rithmus bedingt, ist verschieden.

147) Wir haben bisher nachgewiesen, daß es gleichgültig ist, ob in einer Gleichung ein Glied fehlt, oder nicht, aber wegschaffen darf man keines, weil hiedurch die Beziehung der Glieder der Gleichung verändert wird.

Z. B. $x^3 - 36x = 91$. Da hier $x = 7$ leicht zu finden ist, so erhält man $343 - 252 = 91$. Theilt man diese Gleichung mit $x - 7$, so erhält man $x^2 - 7x - 13 = 0$. Die beiden Factoren dieser Gleichung sind also $(x - 8{,}525)\ (x + 1{,}525)$. Setzt man $x = 8{,}525$, o erhält man $72{,}675 - 59{,}675 = 13$. Der zweite Werth gibt $x^2 = 7x + 13$, und $23{,}25 = 10{,}25 + 13$. Dieser Werth gehört also obigem Gesetz.

Aufgaben.

1. Welche sind die Factoren der Gleichung $x^3 - 12x + 16$ 0 ?

2. Welche sind die Factoren der Gleichung $y^3 + 6y^2 - 18y + 10 = 0$?

148) Gleichungen vom 4ten Grade.

Es seye $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$ gegeben, so findet man durch Versuche $x = 0{,}205$. Theilt man diese Gleichung mit $x + 0{,}205$, so erhält man

$$x^4 - 4x^2 + 3x^2 + 4x + 1 \mid x + 0{,}205$$
$$x^4 + 0{,}205x^3 \qquad \mid x^3 - 4{,}205x^2 + 3{,}862025x + 4{,}75$$
$$- 4{,}206x^3 + 3x^2$$
$$4{,}205x^3 + 0{,}862025x^2$$
$$3{,}862025x^2 - 4v$$
$$3{,}862025x^2 - 0{,}79x$$
$$4{,}79x + 1$$

Theilt man nun die gefundene Gleichung vom 3ten Grade, mit ihrem aus Versuche gefundenen Theiler 4,8, so erhält man

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4{,}205x^2 + 3{,}862025x + 4{,}79 & x - 48 \\ \hline x - 4{,}8 \,.\,.\, x^2 & x^2 + 0{,}605x + 0{,}958 \\ \quad 0{,}605x^2 - 3862025x & \\ \quad 0{,}605x^2 - 2{,}904 \,.\,.\,.\, x & \\ \quad\quad 0{,}958x + 4{,}79 & \end{array}$$

und $x + 0{,}605 + 0{,}958 = x(x + 0{,}605 + \frac{0{,}958}{x})$.

Bemerkung. Der Zahlenrithmus entwickelt immer im Gesetz der Gleichung, die Beziehung, unter welcher sie auf Null gebracht werden kann, d. i. die gehörigen Operationszeichen, durch die Division, welche allezeit mit den gegebenen Grundgesetzen conform sind, wenn man nur mit logischer Strenge rechnet.

Aufgaben.

1. Man soll die Binomial-Factoren der Gleichung $x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 20x - 15 = 0$ bestimmen?

Gleichungen vom 5ten Grade.

149) Es seye $x^5 - 3x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ gegeben, man soll ihre fünf Factoren bestimmen? *)

Man findet $x = 0{,}371$ als Factor, dividirt man die Gleichung mit $(x + 0{,}371)$ so erhält man $x^4 - 0{,}371x^3 - 2{,}629x^2 + 3{,}025x - 8{,}12$. Theilt man wieder mit $x + 1{,}149$, so erhält man $x^3 - 0{,}778x^2 + 3{,}525x -$

*) Dem Anfänger zur Erleichterung wollen wir die arithmetischen Factoren von 15 angeben, welche das Gesetz der Gleichung bedingt; sie sind nemlich aproximative $4{,}670 \times 0{,}59 \times 6{,}5135 \times 0{,}5135 = 15$.

7,076 = 0, in welcher x — 2,868 ein Factor ist, mit welchem neuerdings getheilt $x^2 - 2{,}09x - 2{,}46 = 0$ erfolgt, deren Factoren $(x + 2{,}929)\ (x - 0{,}839)$ sind. Die Gleichung ist also Binomial-Produkt von

$$(x + 0{,}371).\ (x + 1{,}149).\ (x - 2{,}868).\ (x + 2{,}929).\ (x - 0{,}839).$$

150) Aus den Gesetzen der Combinationen mehrtheiliger Größen, und allem vorhergehenden, muß die Folgerung gemacht werden, daß die Schwierigkeit der Auflösung einer Gleichung mit der Zahl der höchsten Exponenten zwar wächst, aber nur in so ferne, als mehr Factoren zu bestimmen sind.

151) Daß keine Gleichung andere Factoren als operative hat, d. i., daß sie weder positive noch negative noch immaginäre Factoren haben kann, welche nur Resultat einer unrichtigen Theorie sind, mittels welcher, wie sämmtliche Lehrbücher beweisen, nichts consequentes, meistens nichts zureichendes, und öfters auch falsches gefolgert wurde.

Der Verfasser glaubt durch die Einfachheit der Grundsätze und die Evidenz der Resultate, welche nach der allgemeinen Theorie in dieser Beziehung nie erreicht werden kann, die Berichtigung, Vereinfachung und Erweiterung dieses höchsten Zweckes der Analys vollständig erreicht zu haben.

Noch einige Aufgaben.

1. $x^5 - \overline{24x^3 - 12x^2} - \overline{11x - 7} = 0.$

Die arithmetischen Factoren sind $4{,}676 \times 0{,}50 \times 0{,}744 \times 6{,}5135 \times 0{,}513 = 7$. Welches ist das Gesetz der corresp. Gleichungen?

2. $x^6 - \overline{35x^3 - 216} = 0$ zu bestimmen?

3. $\overline{12x^7 + 14x^6} - \overline{84x^5 + 21x^4} - \overline{224x^3 - 168x^2} \overline{+ 5} = 0$ *)

152) Etwas von den Reihen.

Da die Reihen nichts anders, als nach irgend einem Gesetze geordnete Zahlen, oder allgemeine Größen sind, deren Summe aufzufinden öfters von Nutzen ist, so wollen wir die einfacheren, welche noch ausser den arithmetischen und geometrischen vorkommen, hier mittheilen, die combinirten aber für den folgenden Band versparen.

153) Hierher gehören die figurirten und Vielecks-Reihen. Die figurirten sind folgende:

Zahlen	Beständige:	1.	1.	1.	1.	1.	ꝛc.
	Natürliche:	1.	2.	3.	4.	5.	ꝛc.
	Dreiecks:	1.	3.	6.	10.	15.	ꝛc.
	Pyramidial:	1.	4.	10.	20.	35.	ꝛc.

Die erste und zweite Reihe bedarf keiner Erörterung, die dritte ist immer die Summe der correspondirenden Glieder der zweiten, und eben so die vierte jener der dritten u. s. w.; so daß die Dreiecksreihe $1 + 2 + 5 + 4 = 10$ als viertes Glied, und die Viereckreihe $1 + 4 + 6 + 10 = 20$ als viertes Glied hat.

154) Die Vieleckszahlen entstehen auf folgende Art: Wenn man eine Zahl von arithmetischen Reihen, deren Differenzen immer um Eins zunehmen, von Glied zu Glied addirt, so entstehen neue Reihen, welche die Reihen der Vieleckszahlen bilden.

---

*) Dem Anfänger zur Erleichterung geben wir die arithmetischen Factoren von 0,416 im Gesetz der Gleichung. $1,8 \times 014 \times 1,054 \times 2,718 \times 0,6 \times 0,158 \times 1,475 = 0,416$.

So ist

Arithmetische Reihen:

1.	2.	3.	4.	5.	ꝛc.
1.	3.	5.	7.	9.	ꝛc.
1.	4.	7.	10.	13.	ꝛc.
1.	5.	9.	13.	17.	ꝛc.

1.	3.	6.	10.	15.	Dreiecks	Zahlen
1.	4.	9.	16.	25.	Vierecks	
1.	5.	12.	22.	35.	Fünfecks	
1.	6.	15.	28.	45.	Sechsecks	

So kann man unbedingt viele Reihen bilden, je nachdem es irgend ein Zweck erfordert. Ihre Benennung rührt daher, weil man sie in der Form geometrischer Flächen und Körper durch Punkte darstellen kann.

155) Von der Umkehrung (Rückkehr) der Reihen.

Von dieser Gattung Analys nur einstweilen Folgendes: Es seye $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 \ldots$ ꝛc. gegeben. Man soll den Werth von y in x bestimmen?

Da a, b, c, d, e bekannte Größen sind, so ist y für jeden bekannten Werth von x leicht zu bestimmen. Es seye $x = 100$ $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 1$, so findet man auf eben die Art, wie in den Gleichungen $y = 1{,}927$; also

$$\begin{aligned} 5y &= 9{,}635 \\ 4y^2 &= 14{,}853 \\ 3y^3 &= 21{,}466 \\ 2y^4 &= 27{,}576 \\ y^5 &= 26{,}581 \\ \hline &100{,}111 = 100 = x \text{ auf } 0{,}001 \text{ genau.} \end{aligned}$$

Wäre für dieselben Werthe von a, b, c ꝛc. $x = 1$, so fände man $y = 0{,}175$ und

$$\begin{aligned} 5y &= 0{,}875 \\ 4y^2 &= 0{,}122 \\ 3y^3 &= 0{,}016 \\ 2y^4 &= 0{,}001 \\ y^5 &= 0{,}000 \\ \hline & 1{,}014 = x \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Eben so leicht lassen sich in $\frac{1}{1+x} = (A + Bx + Cx^2 \ldots)$ wenn man $(1+x)\ A + Bx + Cx^2 \ldots) = 1$ setzt, und x irgend einen Werth gibt, die Coefficienten $A + B + C \ldots$ rc. entwickeln. (Nro. 47.)

156) Lehre und Anwendung der Logarithmen.

Es seye die geometrische Reihe a^{1-1}, a^1, a^2, a^3, a^4 rc., so heißen die Exponenten derselben, welche eine geometrische Reihe bilden, die Logarithmen der correspondirenden Glieder der geometrischen.

Setzt man $a = 10$, so ist $10^{1-1} : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 :$ rc. und somit z. B. $2 = $ L. $10^2 = $ L. 100, $3 = $ L. $10^3 = $ L. 1000 u. s. w.; und allgemein, wenn $a^m = c$, $m = c$.

157) Hieraus folgt, daß der Logarithmus irgend einer Größe c, der Exponent irgend einer Potenz ist, auf welche eine andere Größe, a, erhoben werden müßte, damit $a^m = c$ würde.

158) Diese Größe a heißt die Basis der Logarithmen. So wäre z. B. $a^m = c$
$a^n = d$
rc. a die logarithmische Basis.
Wäre auch $b^p = f$
$b^q = g$
rc. so wäre b die Basis eines andern Systems u. s. w.

159) 1. In jedem log. System ist der Logarithmus der Basis $= 1$; denn $a = a^1$, $b = b^1$ u. s. w. 2) Der Logarithmus der Einheit ist immer $= 0$; denn $a^{1-1} = 1$.

160) Beobachtet man die Gleichungen $a^m = c$, oder $a^{L c} = c$, und $a^n = d$ oder $a^{L d} = d$. (Da $m = L. c$, $n = L. d$) so findet sich, wenn wir diese beide Formeln mit einander multipliciren $a^{L c + L d} = cd$; also $L. c + L. d = L. cd$. Es ist also der Logarithmus irgend eines Produktes, gleich dem Logarithmus seiner Factoren addirt.

161) Wenn man die beiden Formeln durcheinander dividirt, so erhält man $a^{L c - L d} = \frac{c}{d}$. Also $L. c - L. d = L. \frac{c}{d}$; der Logarithmus des Quotients zweier Größen ist also die Differenz der Logarithmen derselben.

162) Wenn $d = c$ ist, so erhält man $L. c + L. c = L. c^2$, oder $2 L. c = L. c^2$. Eben so würde man erhalten $L. c^3 = 3 L. c$, und $L. c^4 = 4 L. c$ u. s. w. und allgemein $L. c^r = r L. c$. Um also den Logarithmus irgend einer Potenz zu erhalten, darf man nur deren Logarithmus mit ihrem Exponenten multipliciren.

163) Es erfolgt also im Gegensatz $L. c^{\frac{1}{3}} = L. \frac{c}{3}$ und allgemein $L. c^{\frac{1}{r}} = L. \frac{c}{r}$. Man muß, um den Logarithmus irgend einer Wurzel zu finden, ihren Logarithmus mit dem Exponenten dividiren.

164) Nach diesen Gesetzen ist es leicht, Folgendes abzuleiten:

$L. abcd = L. a + L. b + L. c + d$;

$L. \frac{1 + x}{1 - x} = L. (1 + x) - L. (1 - x)$

$L. a^m b c^p = m L. a + n L. b + p L. c$

$$\mathfrak{L}.\sqrt{(a^2+x^2)} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}.(a^2+x^2)$$
$$\mathfrak{L}.(a^2-x^2) = \mathfrak{L}.(a+x) + \mathfrak{L}.(a-x)$$
$$\sqrt[m]{(a^2-x^3)} = \frac{1}{m}\,\mathfrak{L}.(a+x) + \frac{1}{m}\,\mathfrak{L}.(a-x)$$
$$\mathfrak{L}.\frac{x^m}{y^n} = m\mathfrak{L}.x - n\mathfrak{L}.y.$$

Bemerkung. Da alle nöthigen Logarithmen nach verschiedenen Zwecken schon berechnet sind, und die beziehenden Methoden der Berechnung, ihr Zweck, und die Art sie aufzufinden in den Logarithmen-Tafeln selbst vollständig gelehrt wird, so wäre es überflüssig, dieß hier vorzutragen, wir wollen daher nur einige Anwendungen dieser so hoch nützlichen Lehre vortragen.

162) Wir wissen, daß (vermög Nro. 116 der II. Abtheilung) das letzte Glied irgend einer geometrischen Reihe $10 = aq^{n-1}$ ist; es ist also um die Zahl der Glieder einer solchen Reihe zu finden, folgende Analys zur Entwickelung von n zu machen, wo sich der Nutzen der Logarithmen vorzüglich ausspricht.

Es ist nemlich

$$w = aq^{n-1} \text{ also}$$
$$\frac{w}{a} = q^{n-1}, \text{ und}$$
$$\mathfrak{L}.\ \frac{w}{a} = \mathfrak{L}.\ q^{n-1}$$
$$\mathfrak{L}.\ \frac{w}{a} = (n-1)\ \mathfrak{L}.\ q$$
$$\mathfrak{L}.\ \frac{w}{a} : \mathfrak{L}.\ q = n-1, \text{ folglich}$$
$$n = \mathfrak{L}.\ \frac{w}{a} : (\mathfrak{L}.\ q) + 1 = \frac{\mathfrak{L}.\ w - \mathfrak{L}.\ a}{\mathfrak{L}.\ q} + 1.$$

Eben so haben wir gesehen, daß die Summe aller Glieder

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \text{ alſo}$$

$$\frac{s(q - 1) + a}{a} = q \text{ und}$$

$$L. \frac{s(q - 1)}{a} + 1 = L. q = n L. q, \text{ alſo}$$

$$n = \frac{L. \frac{(s(q - 1}{a} + 1}{L. q.} \text{ u. ſ. w.}$$

Anwendung. Nehmen wir an (Nro. 115) es ſeye das 1te Glied einer Reihe $a = 2$, $q = 2$, das letzte $w = 64$, und $n = x$, ſo iſt alſo vermög obiger Formel $x = \frac{L. w - L. a}{L. q.} + 1$, alſo $x = \frac{L. 64 - L. 2}{L. 2} + 1$,

L. 64 = 1,8061800
L. 2 = 0,3010300
1,5951500 : (L. 2 = 0,3010300) = 5, alſo n = 5 + 1 = 6.

2. Da hier $s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = 126$. So wäre, wenn wieder $n = x$ vermög $x = \frac{L. \left(\frac{s(q - 1)}{a} + 1\right)}{L. q.} =$

L. s = 2,1003705
L. 2 — 1 = 0, ...
L. 2 = 0,3010300
1,7993405 = L. 63.

alſo L. (63 + 1) = 1,8061800, und $\frac{1,8061800}{L. 2 = 0,3010300}$ = 6, alſo n = 6 Glieder!

163) Eine fernere ſehr wichtige Anwendung der Lehre der Logarithmen, iſt die höhere Zinſenrechnung, wovon die einfachen Fälle ſchon in den Nummern 110 — 112) vorgetragen wurden. Hier ſind alſo noch folgende Fälle zu berückſichtigen.

1. Es habe Jemand ein Capital mit der Bedingung aufgenommen, daß er alle Jahre eine gleiche Summe, welche aus dem entsprechenden Interesse und einem Theil des Capitals besteht, zurückbezahlen muß.

In diesem Falle wird das Capital, also auch das davon zu entrichtende Interesse mit jedem Jahre kleiner. Daher muß mit jedem Jahre von dem Capitale mehr bezahlt werden, um die immer gleich bestimmte Summe zu theilen.

Wenn man das Capital $= c$ setzt, so ist das jährliche Interesse zu 5 pCt. z. B. $\frac{c}{20}$, und allgemein $\frac{n}{m}$, also das zu entrichtende jährliche Interesse $\frac{cn}{m}$, wo die Einheit in $c = 100$ gedacht wird.

Der Theil des Capitals, welcher im ersten Jahre bezahlt werden muß, heiße x, der im zweiten y, im dritten z, im vierten v, u. s. w., so wird das Interesse

im 1ten Jahr $\frac{n}{m} . c$

„ 2ten „ $\frac{n}{m} (c - x) = \frac{nc - nx}{m}$

„ 3ten „ $\frac{n}{m} (\overline{c - x} - y) = \frac{\overline{nc - nc} - ny}{m}$

„ 4ten „ $\frac{n}{m} (\overline{\overline{c - x} - y} - z) =$

$$\frac{\overline{\overline{nc - nx} - ny} - nz}{m}$$

werden, um für jedes Jahr eine gleiche Summe zu haben, die für jedes Jahr treffenden Theile des Capitals x, y, z, v addirt, so wird daher

im 1ten Jahre $x + \frac{n}{m} c = \frac{mx + nc}{m}$

„ 2ten „ $y + \frac{nc - nx}{m} = \frac{ym + \overline{nc - nx}}{m}$

im 3ten Jahr $z + \frac{nc - nx - ny}{m} =$

$\frac{mz + nc - nx - ny}{m}$

„ 4ten „ $v + \frac{nc - nx - ny - nz}{m} =$

$\frac{vm + nc - nx - ny - nz}{m},$

also da die Summen, welche in jedem Jahre bezahlt werden, gleich sind, ist im 2ten Jahre

$$\frac{mx + nc}{m} = \frac{my + nc - nx}{m},$$

also $y = \frac{(m + n)}{m} x$ u. s. w. Es bilden also die Theile, welche jährlich vom Capital bezahlt werden müssen, die geometrische Reihe

$$x \frac{(m + n)^0}{m},\ x \frac{(m + n)^1}{m},\ x \frac{(m + n)^2}{m},\ x \frac{(m + n)^3}{m}$$

Man hat also so viele Glieder der Reihe zu nehmen, als Jahre der Rückzahlung bedingt sind.

Setzen wir die Summe der Coefficienten $= p$, so ist die ganze Reihe xp. Da aber $xp = c$ seyn muß, so ist $x = \frac{c}{p}$.

1. Es ist daher der vom Capital zu bezahlende Betrag immer gleich dem im ersten Jahre zu bezahlenden $x \times \frac{(m + n)^r}{2}$.

2. Da allgemein $S. = \frac{wq - a}{q - 1}$ (Nro. 116) so ist daher $w = \frac{(m + n)^r}{m} x.$ $a = x$, $q = \frac{m + n}{m}$, $c =$

$$xp = \frac{\frac{(m+n)}{m} \, x \, \frac{(m+n)}{m} - x}{\frac{m+n}{m} - 1} =$$

$$\frac{\left[\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right] x}{\frac{n}{m}}$$ folglich transponirt.

3. $\frac{cn}{mx} + 1 = \frac{(m+n)}{m} = \frac{cn + mx}{mx}$ und

L. $\frac{cn + mx}{mx} = (r + 1)$ L. $\frac{m+n}{m}$ folglich die Anzahl der Jahre $x + 1 =$ L. $\frac{cn + mx}{mx}$: L. $\frac{m+n}{m}$

4. Eben so findet man für den im ersten Jahre zu bezahlenden Theil des Capitals

$$x = \frac{cn}{m\left[\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right]}$$

5. Heißt die ganze in jedem Jahre zu bezahlende Summe d, so ist dieselbe $d = x + \frac{nc}{m}$.

Das Capitalsantheil $x = d - \frac{nc}{m}$.

Das Capital selbst $c = (d - x) \frac{m}{n}$.

Der Zinsfuß $\frac{n}{m} = \frac{d - x}{c}$.

6. Ist in dem Bruche $\frac{n}{m}$, $n = 1$, (wie z. B. 5 pCt. $= \frac{1}{20}$) so werden obige Formeln.

$$c = [(\frac{m+n}{m})^{r+1} - 1]\, xm.$$

$$r+1 = \text{L.}\frac{c+mx}{mx} : \text{L.}\frac{m+1}{m}.$$

$$x = \frac{c}{m[(\frac{m+n}{m})^{r+1} - 1]}, \text{ u. s. w.}$$

Anwendung. Wäre ein Capital von 8620 Gulden auf 4 Jahre zu 5 pCt. angelegt, so wäre $c = 8620$, $r+1 = 4$, $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, also $x = \frac{8620}{20[(\frac{21}{20})^4 - 1]} = 2000$

Im 2ten Jahre ist das Capital nur mehr 8620 — 2000 = 6620, die Interessen also $\frac{6620}{20} = 331$, um daher 2431 voll zu machen, müssen vom Capital 2100 + 331 = 2431 Gulden genommen werden.

Im 3ten Jahre ist das Capital noch 4520, das Interesse 226, der Capitalsantheil also 2205 + 226 = 2431.

Im 4ten Jahre ist das Capital 2315, das Interesse also 116, der Capitalsantheil also 2315 + 116 = 2431, und 2000 + 2100 + 2205 + 2315 = 8620.

II. Wenn ein Capital so ausgeliehen wird, daß alle Jahre der Zins zu dem Capital geschlagen, und selbst mit verzinst wird, so heißt diese Art des Darlehens, auf Zinseszins, oder Anatocismus. Wir haben hier eine allgemeine Formel zu suchen, welche bestimmt, wie groß nach einer gewissen Zeit das Capital geworden ist. Es seye allgemein ein Capital a, so ist auch allgemein der Zins eines Jahres $= \frac{a \cdot n}{m}$, und nach einem Jahr die ganze Summe $= a + \frac{an}{m}$. Wenn daher unser bestimmtes Capital c heißt, so wird

$$a : a + \frac{an}{m} = c : x$$

$$a : (\frac{m + n}{m})a = c$$

$1 : \frac{m + n}{m} = c : x$, also nach dem ersten Jahre die ganze Summe $x = (\frac{m + n}{m})c$.

Eben so ist $c = (\frac{m + n}{m})c = (\frac{m + n}{m})c : y$ also nach zwei Jahren $y = (\frac{m + n}{m})^2 c$, u. s. w., also allgemein nach r Jahren das ganze Capital $S = (\frac{m + n}{m})^r c$. Daher auch $\frac{S}{c} = (\frac{m + n}{m})^r$, und L. $\frac{S}{c}$ = r L. $\frac{m + n}{m}$ also die Anzahl der Jahre, welche c aufliegen muß, um S zu werden, oder r = L. $\frac{S}{c}$: L. $\frac{m + n}{m}$ und $c = \frac{S}{(\frac{m + n}{m})^r}$.

Anwendung. Es seye $c = 2000$. $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, r = 4, so wäre $S = (\frac{21}{29})^4 . 2000 = \frac{194481}{160000} . 2000 = 2421$ Gulden; r fände man vermög r = (L. $\frac{2431}{2000}$: L. $\frac{21}{20}$) = 4, u. $c = \frac{2431}{(\frac{21}{20})^4} = 2431 : \frac{194481}{160000} = 1999{,}99 = 2000$.

III. Wenn Jemand, gemäß eines Vertrages, ein Capital nach einigen Jahren zurückbezahlen soll, dasselbe

unter dieser Zeit unverzinslich gebrauchen kann, der Gläubiger aber nun sein Capital früher erhalten will, so nennt man dieses Verfahren Anticipation (Rabbath). Da aber dieses Capital dem momentanen Besitzer noch ferner Zinseszins getragen hätte, so hat er das Recht, so viel von dem ganzen Capital abzuziehen, als die Zinse ihm eingetragen hätten.

Um dies zu bestimmen, seye wieder das Capital = c die kleinere der Anticipation wegen zurückzustellende Summe x, der Zinsfuß eben so $\frac{n}{m}$, und die Jahre der Anticipation r, so läßt sich die Summe des ganzen Capitals c, als aus der durch Anticipation zu bezahlenden Summe x, wenn sie auf Zinseszins r Jahre gelegen hätte, denken.

So daß $c = x\left(\frac{m+n}{m}\right)^r$, folglich

$$x = \frac{c}{\left(\frac{m+n}{m}\right)^r} = c\left(\frac{m}{m+n}\right)^r.$$

Daher wird $\frac{c}{x} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^r$, und $L.\frac{c}{x} = L.\left(\frac{m+n}{m}\right)^r = r\,L.\left(\frac{m+n}{m}\right)$, also die Anzahl der Jahre $r = L.\frac{c}{x} : L.\frac{m+n}{m}$.

Anwendung. Sollte die zu fünf pCt. liegende Summe von 23000 Gulden nach 3 Jahren erst zurückbezahlt werden, und verlangt sie der Gläubiger schon jetzt, so würde $c = 23000$, $r = 3$, $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, und daher x

$23000 : \left(\frac{20}{21}\right)^3 = 23000 \cdot \frac{8000}{9261} = 19868$ Gld. 12 Kr.

Für r fände man $r = L.\frac{23000}{19868{,}2} : L.\frac{21}{20} =$

$\frac{\mathfrak{L}.\ 1{,}157}{\mathfrak{L}.\ 1{,}05} = \frac{0{,}06335}{0{,}02119} = 3$ Jahre; und das Capital selbst wieder vermög $c = 19868{,}2\ (\frac{21}{20}) = 19868{,}2 \cdot \frac{9261}{8000} =$ 23000 Gulden.

Aufgabe.

Man soll für $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, $r + 1 = 4$ Jahre, $c = 8620$, $x = 2000$, und indem man immer eines dieser drei Gegebenen als unbekannt annimmt, die folgenden Formeln anwenden, um dasselbe zu bestimmen?

1. $r + 1 = \mathfrak{L}.\ (\frac{c + mx}{mx}) : \mathfrak{L}.\ \frac{m + 1}{m}$.

2. $c = [(\frac{m + n}{m})^{r+1} - 1]\ mx$

3. $d = x + \frac{nc}{m}$; ($d =$ der in jedem Jahr zu bezahlenden Summe)?

Auflösung der Aufgaben
im 1ten Bande.

Nro. 1. Pag. 5. 3000007.
„ 2. „ — 5'024400,0013.
„ 3. „ — Man spreche: Zehen Millionen, siebenhundert, neunzigtausend, achthundert und zwei und achtzig.

„ 1. „ 7. Die drei Städte hatten 1099367 Einwohner.
„ 2. „ 8. Sie hatten 80,27 Ellen.
„ 3. „ — Sie wiegen 8,56 Zentner.

„ 1. „ 9. Die erste Armee ist um 171431 Mann stärker.
„ 2. „ — Es bleiben noch 7,641 Ellen übrig.
„ 3. „ 10. Der Erstere ist um 1,902 Zentner schwerer.

„ 1. „ 13. Sie kosten 318,744483 Gld.
„ 2. „ 14. Sie kosten 5211,0375 Gld.
„ 3. „ — Da ein Würfel sechs Seiten hat, so kann immer einer gegen den anderen eine der sechs verschiedenen Seiten zeigen, es können also alle acht Würfel $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1679616$mal verschieden liegen.

„ 1. „ 17. Die Elle kostet 250,5 Gld.
„ 2. „ — Ein Jeder erbt 5062,5 Gld.
„ 3. „ — Man bekommt 7 Zentner.

Nro. 1. Pag. 21. Man erhält also $\overline{6x + 4xy + 4fz + l^2 + 7ax + x^2y + 4az + 2l}$.

" 2. " — Man erhält $9xz + 12xy + 6z^2 + 9ay$.

" 3. " — Man erhält $13abx + 5xy + 16bdf$.

" 1. " 22. Man erhält $\overline{8xy + 9mn + 7l^2 + 4l^2n - 9x + 2yz + 2z + 4az}$.

" 2. " — Man erhält $2abc - (2amn + 2xy)$.

" 3. " — Eben so $2ab + 2xy + 2$.

" 1. " 25. Man erhält $a^6 - b^6$.

" 2. " — Das Produkt ist $(10a^2 6x + 35ax^2y + 10ab^2yz + 10ab^2yz) - (20axyz + 20by^2z)$.

" 3. " — Man erhält $(5a^2 + 10bc) - (5b^2 + 5c^2)$.

" 1. " 27. Man erhält $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$.

" 2. " — Eben so $a - b$.

" 3. " — Eben so $a - b$.

" 1. " 32. Der gesuchte Quotient ist $1 + \frac{89}{170}$.

" 2. " — Die Kubickklafter kostet $35\frac{3}{5}$ Gulden.

" 3. " — Es ist $\frac{c}{a-b} = Q + \frac{m(mc-(a-b)q}{m^2(a-b)} + \frac{m[m(mc-(a-b)q-(a-b)q']}{m^3(a-b} + .$

Ist nun $c = 1$, $a = 5$, $b = 3$, so erhält man $\frac{1}{2} = 0 + \frac{10}{20} + \frac{10(10-2.5)}{100.2}$

also $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Da hier schon das zweite Glied der Reihe = 0 wird.

Nro. 1. Pag. 37. Diese Kubikwurzl ist 7,831.

" 2. " — Man erhält 8,11.

" 3. " — Eben so 3,1.

" 1. " 40. Man erhält $c + \left(\frac{d}{2c^2} - \frac{d^2}{gc^2} - \frac{5d^3}{81c^8} - \ldots \text{ıc.}\right)$

" 2. " — $a - \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{ga^3} + \frac{5x^6}{16a^5} + \frac{5x^8}{128a^7} + \text{ıc.}\right)$

" 3. " — $a - \left(\frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^2} + \ldots \text{ıc.}\right)$

" 1. " — Es ist $12 \times 100 : 5 = 29 \times 2000 : x$, also $x = \frac{58000 \times 5}{1200} = 241{,}66$ Gulden.

" 1. " 51. Es ist $105 : 102{,}5 = 3000 : x$, also $x = 2929{,}57$ was der Vorzeiger erhält.

" 2. " — Es ist das Gesetz 2×2, 2×2^2, 2×2^3, 2×2^4, also $2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, die verlangte Reihe.

" 3. " — Man muß also die Summe einer Reihe von 32 Gliedern finden, deren erstes Glied 1, und das Gesetz 2 ist, es ist also das 32te Glied $= 1 \times 2^{31} = 2147483648$, welches mit 3 multiplicirt werden muß, man erhält also 4294967296, hievon muß nun 1 abgezogen, und der Rest mit 2 — 1 ge-

theilt werden. So viele Pfennige würde der junge Mensch für sein Pferd erhalten.

Nro. 4. Pag. 58. Aus dieser Aufgabe resultirt die Gleichung $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{x}{8} - \frac{1}{8}$, also $8x = 7x + 7$, also $x = 7$. Der Geber hatte also 7 Thaler.

„ 5. „ — Der Körper des Fisches war 36 Zoll, und der Schweif 27 Zoll lang. Denn man erhält $x - g = 9 + \frac{x}{2}$, und also $x = 361 -$.

„ 6. „ — Man erhält $\frac{mx - nx}{q} = (p - n)$.

„ 1. „ 62. Man erhält also die zwei Gleichungen $x + 1 = 2y - 2$, und $x - 1 = y + 1$. Die erste wird $x = 2y - 3$, und die Zweite $x = y + 2$ also $2y - 3 = y + 2$, also $y = 5$, $x = 7$.

„ 1. „ 68. Setzt man den Preis des Pferdes $= x$, so ist da er x pro c. gewonnen hat, so gewinnt er mit x, vermög $100 : x = x : \frac{x^2}{100}$. Er muß also das Pferd um $x + \frac{x^2}{100}$ Thlr. verkaufen. Es ist also $x + \frac{x^2}{100} = 119$, also $x^2 + 100x = 11900$, und vermög der beziehenden Formel $x = 70$.

„ 2. „ — Da der erste x Thaler eingelegt hat, so ist die Einlage des andern $100 - x$. Da nun der Erste 99 Thaler zurückziehet, so ist sein Gewinn $99 - x$, wel-

/99

chen er in drei Monate mit seinem Kapital gemacht hat. Da nun der Andere auch 99 Thlr. zurückzieht, so war sein Gewinn $x - 1$, welchen er in zwei Monaten mit dem Kapital $100 - x$ erworben hat. Er würde aber mit eben diesem Kapital in drei Monaten $\frac{3x - 3}{3}$ gewonnen haben! — Nun sind diese Gewinnste den Kapitalen proportionirt, es ist also $x : gg - x = 100 - x : \frac{3x - 3}{2}$ also $\frac{3x^2 - 3x}{2} = 9900 - 199x - x^2$, diese Gleichung entwickelt, giebt $x^2 + 305\,x = 19800$, und $x = 45$. Der Erste hat also 45 Thlr. und der Zweite 55 Thlr. eingelegt.

Nro. 3. Pag. 68. * Es seye die Größere x und die Kleinere y, so erhält man $xy = 35$, und $x^2 - y^2 = 24$. Also $y = \frac{35}{x}$. Setzt man in der zweiten Gleichung diesen Werth für y^2, so erhält man $x^2 - \frac{1225}{x^2} = 24$, und $x^4 - 24x^2 = 1225$. Setzt man $x^2 = z$, so erhält man $z^2 - 24z = 1225$, also $z = 12 \pm \sqrt{144 + 1225} = 12 + 37$, also $z = 49$, und $z' = 25$. Die Factoren dieser Gleichung sind also $(z - 49) \times (z + 25)$, und $x = 7'$, und $x' = 5$.

„ 1. „ 73. Der erste Factor dieser Gleichung ist 4, und $64 - 48 + 16 = 0$, und $x(x + 4 + \frac{4}{x})\ (x - 4)$ die Faktoren.

*) Die Aufgabe ist, zwei Zahlen zu bestimmen, deren Produkt 35, und die Differenz ihrer Quadrate 24 ist?

Nro. 2. Pag. 73. Die drei Faktoren der Gleichung $y^3 + 6y^2 - 18y + 10 = 0$, sind $(x - 0{,}7971)$ $(y^2 + 6{,}9791y - 12{,}582)$ also $(y - 0{,}7971)$ $(y + 8{,}311)$ $(y - 1{,}5139)$.

" 1. " 75. Der erste Theiler der Gleichung $x^5 - \overline{24x^3} - \overline{12x^2} - \overline{11x} - \overline{7} = 0$ ist x 4:676, und man erhält $\overline{x^4} + \overline{41676x^3} - \overline{2{,}155x^2} - \overline{2{,}02x} - 1{,}5 = 0$. Theilt man ferner mit $x - 0{,}59$ so erhält man $x^3 + \overline{5{,}266x^2} - \overline{0{,}972x} + \overline{2{,}59} = 0$ wieder mit $x - 0{,}744$ getheilt, giebt $x^2 + 6x - 3{,}472 = 0$, worin $x = 6{,}51358$, und $0{,}51358$ wird.

" 2. " — Theilt man die Gleichung $x^6 - \overline{35x^3} - \overline{216} = 0$, mit $x - 3$, so erhält man, nach dem Gesetz der Theilung, $\overline{x^5 + 3x^4 + 9x^3} - \overline{8x^2} + \overline{24x} + \overline{72} = 0$, wo $x = 2$. Theilt man neuerdings $x - 3$, so erhält man $x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 30x + 36$. Die sechs Faktoren der Gleichung sind also $(x - 3)$ $(x - 2)$. x . x . x $\left(x + 5 + \frac{19}{x} + \frac{30}{x^2} + \frac{36}{x^3}\right)$.

" 3. " — Diese Gleichung gibt reducirt $x^7 + \overline{1{,}166x^6} - \overline{7x^5} + \overline{1{,}75x^4} - \overline{18{,}66x^3} - \overline{14x^2} + 0{,}416 = 0$. Der erste Faktor ist $x - 1{,}475$. Man erhält also $15{,}18 + 12{,}006 - 48{,}96 + 8{,}283 - 59{,}87 - 30{,}45 + 0{,}416 = 27{,}19 - 27{,}19 = 0$.

Theilt man

$$\begin{array}{l}
x^7+1{,}166x^6-7x^5+1{,}75x^4-18{,}66x^3-14x^2+0{,}416 \,\Big|\, x-1{,}475 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{x^6+3{,}135x^5-11{,}624x^4+19x^3-9{,}365x^2+0{,}284} \\
x^7-1{,}475x^6 \\
\hline
\quad 3{,}135x^6-7x^5 \\
\quad 3{,}135x^6-4{,}624x^5 \\
\hline
\qquad 11{,}624x^5+1{,}75x^4 \\
\qquad 11{,}624x^5-17{,}29x^4 \\
\hline
\qquad\quad 19{,}04x^4-18{,}66x^3 \\
\qquad\quad 19{,}04x^4-28{,}015x^3 \\
\hline
\qquad\qquad 9{,}365x^3-14x^2 \\
\qquad\qquad 9{,}365x^3+13{,}815x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0{,}195x^2+0{,}416x \\
\qquad\qquad\quad 0{,}195x^2-0{,}284x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0{,}284x+0{,}416.
\end{array}$$

— 0,195x

Theilt man diese Gleichung vom 6ten Grad mit (x — 0,158) so erhält man $\overline{x^5 + 3,293x^4 - 11,104x^2 + 20,75x^2 - 12,63x + 18}$, welche mit (x — 0,6) getheilt, gibt $\overline{x^4 + 3,89x^3 - 8,784x^2 + 26x - 3} = 0$, welche mit (x — 2,718) getheilt, gibt $\overline{x^3 + 6,608x^2} - 9,165 - 1,11 = 0$. Theilt man diese Gleichung mit ihrem Faktor (x — 1,054) so erhält man $x^2 \pm 7,66x \mp 1,089 = 0$. Die Faktoren dieser Gleichung sind also (x + 7,8) (x — 0,14).

Nro. 1. Pag. 88. Man erhält

$$r + 1 = \text{L}.\frac{8620 + 20 \cdot 2000}{20 \cdot 2000} : \text{L}.\frac{21}{20} =$$

$$\text{L}.\frac{8620 + 40000}{4000} : \text{L}.1,05 =$$

$$\text{L}.\frac{48620}{40000} : \text{L}.1,05 = 4.$$

" 2. " — Eben so

$$c = \left(\left(\frac{21}{20}\right)^4 - 1\right) 20 \cdot 2000 = \left(\frac{194481}{160000} - 1\right)$$
40000.

$$= \left(\frac{194481 - 160000}{160000}\right) 40000 = \frac{34481}{160000}$$
4000.

$$= \frac{34481}{4} = 8620.$$

" 3. " — Und $d = 2000 + \frac{8620}{20} = 2000 + 431 = 2431$ Gld.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ranson, Joseph <<von>>,

Lehrbuch der reinen Mathematik

Bd.: 1

München 1827

BHS II K 12
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708099-9